



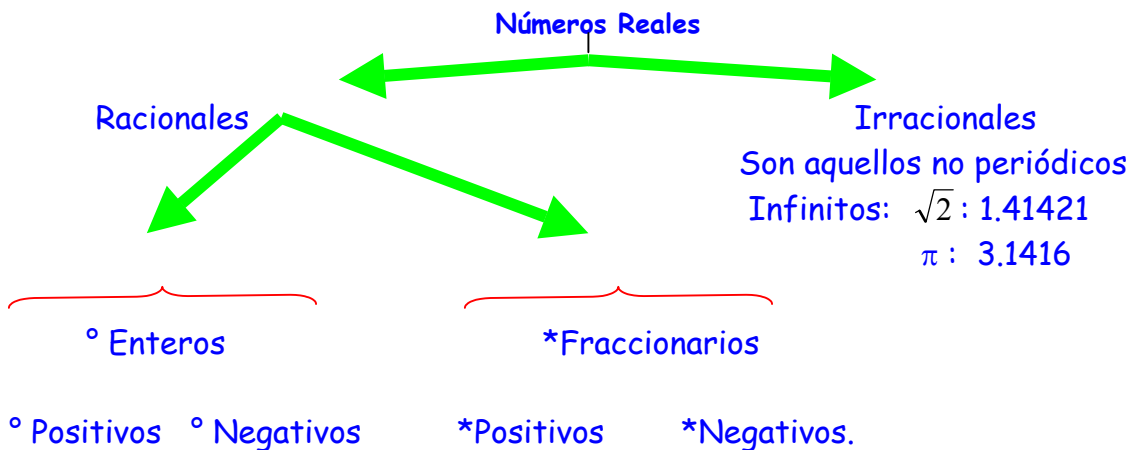
Matemáticas

Concepto de Número

1 INTRODUCCIÓN

Número (matemáticas), palabra o símbolo utilizado para designar cantidades o entidades que se comportan como cantidades.

Los números se agrupan en conjuntos o estructuras diversas; cada una contiene a la anterior y es más completa que ella y con mayores posibilidades en sus operaciones. Se enumeran a continuación.



2 NÚMEROS NATURALES

Son los que sirven para contar los elementos de los conjuntos:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Hay infinitos. Se pueden sumar y multiplicar y con ambas operaciones el resultado es, en todos los casos, un número natural. Sin embargo, no siempre pueden restarse ni dividirse (ni $3 - 7$ ni $7 : 4$ son números naturales).



3 NÚMEROS ENTEROS

Son los naturales y los correspondientes negativos:

$$Z = \{\dots, -11, -10, -9, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 11, \dots\}$$

Además de sumarse y multiplicarse en todos los casos, pueden restarse, por lo que esta estructura mejora a la de los naturales. Sin embargo, en general, dos números enteros no se pueden dividir. Por eso se pasa a la siguiente estructura numérica.

4 NÚMEROS RACIONALES

Son los que se pueden expresar como cociente de dos números enteros. El conjunto Q de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios. Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) y el resultado de todas esas operaciones entre dos números racionales es siempre otro número racional.

5 NÚMEROS REALES

A diferencia de los naturales y de los enteros, los números racionales no están colocados de manera que se puedan ordenar de uno en uno. Es decir, no existe "el siguiente" de un número racional, pues entre dos números racionales cualesquiera hay otros infinitos, de modo que si se representan sobre una recta, ésta queda densamente ocupada por ellos: si tomamos un trozo de recta, un segmento, por pequeño que sea, contiene infinitos números racionales. Sin embargo, entre medias de estos números densamente situados sobre la recta existen también otros infinitos puntos que no están ocupados por racionales. Son los números irracionales.

El conjunto formado por todos los números racionales y los irracionales es el de los números reales, de modo que todos los números mencionados hasta ahora (naturales, enteros, racionales, irracionales) son reales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real.

Entre los números reales están definidas las mismas operaciones que entre los racionales (suma, resta, multiplicación y división, salvo por cero).



6 NÚMEROS IMAGINARIOS

El producto de un número real por sí mismo es siempre 0 o positivo, por lo que la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en el sistema de los números reales. Si se quiere dar un valor a la x , tal que $x = \sqrt{-1}$, éste no puede ser un valor real, no ya en sentido matemático sino tampoco en sentido técnico. Un nuevo conjunto de números (diferente del de los números reales), el de los números imaginarios, se usa para este fin. El símbolo i representa la unidad de los números imaginarios y equivale a $\sqrt{-1}$. Estos números permiten encontrar, por ejemplo, la solución de la ecuación $x = \sqrt{-9}$, que se puede escribir como

$$x = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x = 3 \times i \text{ o } x = 3i$$

Los números bi , $b \neq 0$, se llaman imaginarios puros.

Un número imaginario se obtiene al sumar un número real y un número imaginario puro.

7 NÚMEROS COMPLEJOS

En su forma general, un número complejo se representa como $a + bi$, donde a y b son números reales. El conjunto de los números complejos está formado por todos los números reales y todos los imaginarios.

Los números complejos se suelen representar en el llamado diagrama de Argand. Las partes real e imaginaria de un número complejo se colocan como puntos en dos líneas perpendiculares o ejes. De esta manera, un número complejo se representa como un punto único en un plano, conocido como *plano complejo*.

Los números complejos son de gran utilidad en la teoría de la corriente eléctrica alterna así como en otras ramas de la física, en ingeniería y en ciencias naturales.

Tipos de Números

Naturales (1,2,3,4,5,6... α)
Finitos : $\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{3}{4} = 0.75$
° **Primos** (2,3,5,7,11,13,17...)
° **Pares** (.... -4,-2,0,2,4,6,..., ∞)

***Periódicos infinitos** : $\frac{1}{3} = 0.333$;
 $\frac{2}{3} = 0.666$
° **Impares** ($-\infty$..., -3, -1, 0, 1, 3, 5, ..., ∞)
° **Dígitos** (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)



Aritmética

1 INTRODUCCIÓN

Aritmética, literalmente, arte de contar. La palabra deriva del griego *arithmētikē*, que combina dos palabras: *arithmos*, que significa 'número', y *technē*, que se refiere a un arte o habilidad.

Los números usados para contar son los *naturales* o *enteros positivos*. Se obtienen al añadir 1 al número anterior en una serie sin fin. Las distintas civilizaciones han desarrollado a lo largo de la historia diversos tipos de sistemas numéricos. Uno de los más comunes es el usado en las culturas modernas, donde los objetos se cuentan en grupos de 10. Se le denomina sistema en base 10 o *decimal*.

En el sistema en base 10, los enteros se representan mediante cifras cada una de las cuales representa potencias de 10. Tomemos el número 1.534 como ejemplo. Cada cifra de este número tiene su propio valor según el lugar que ocupa; estos valores son potencias de 10 crecientes hacia la izquierda. El valor de la primera cifra es en unidades (aquí 4×1); el de la segunda es 10 (aquí 3×10 , o 30); el valor del tercer lugar es 10×10 , o 100 (aquí 5×100 , o 500), y el valor del cuarto lugar es $10 \times 10 \times 10$, o 1.000 (aquí 1×1.000 , o 1.000).

2 DEFINICIONES FUNDAMENTALES

La aritmética se ocupa del modo en que los números se pueden combinar mediante adición, sustracción, multiplicación y división. Aquí la palabra *número* se refiere también a los números negativos, irracionales, algebraicos y fracciones. Las propiedades aritméticas de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva son las mismas que las del álgebra.

2.1 Adición

La operación aritmética de la adición (suma) se indica con el signo más (+) y es una manera de contar utilizando incrementos mayores que 1. Por ejemplo, cuatro manzanas y cinco manzanas se pueden sumar poniéndolas juntas y contándolas a continuación de una en una hasta llegar a 9. La adición, sin embargo, hace posible calcular sumas más fácilmente. Las sumas más sencillas deben aprenderse de memoria. En aritmética, es posible sumar largas listas de números con más de una cifra si se aplican ciertas reglas que simplifican bastante la operación.

2.2 Sustracción

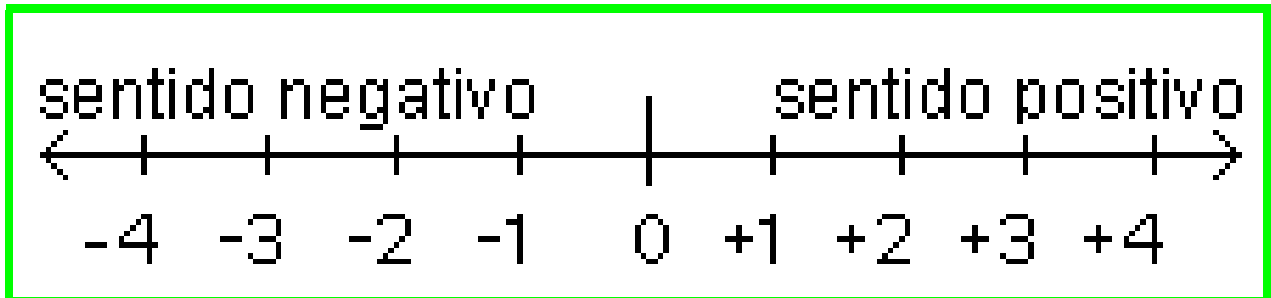


La operación aritmética de la sustracción (resta) se indica con el signo menos (-) y es la operación opuesta, o *inversa*, de la adición. De nuevo, se podría restar 23 de 66 contando al revés 23 veces empezando por 66 o eliminando 23 objetos de una colección de 66, hasta encontrar el resto, 43. Sin embargo, las reglas de la aritmética para la sustracción nos ofrecen un método más sencillo para encontrar la solución.

2.3 Números negativos

El cálculo de la sustracción aritmética no es difícil siempre que el sustraendo sea menor que el minuendo. Sin embargo, si el sustraendo es mayor que el minuendo, la única manera de encontrar un resultado para la resta es la introducción del concepto de números negativos.

La idea de los números negativos se comprende más fácilmente si primero se toman los números más familiares de la aritmética, los enteros positivos, y se colocan en una línea recta en orden creciente hacia el sentido positivo. Los números negativos se representan de la misma manera empezando desde 0 y creciendo en sentido contrario. La recta numérica que se muestra a continuación representa los números positivos y negativos:



Para poder trabajar adecuadamente con operaciones aritméticas que contengan números negativos, primero se ha de introducir el concepto del *valor absoluto*. Dado un número cualquiera, positivo o negativo, el valor absoluto de dicho número es su valor sin el signo. Así, el valor absoluto de +5 es 5, y el valor absoluto de -5 es también 5. En notación simbólica, el valor absoluto de un número cualquiera a se representa $|a|$ y queda definido así: el valor absoluto de a es a si a es positivo, y el valor absoluto de a es $-a$ si a es negativo.

2.4 Multiplicación

La operación aritmética de la multiplicación se indica con el signo por (\times). Algunas veces se utiliza un punto para indicar la multiplicación de dos o más números, y otras se utilizan paréntesis. Por ejemplo, 3×4 , $3 \cdot 4$ y $(3)(4)$ representan todos el producto de 3 por 4. La multiplicación es simplemente una suma repetida. La expresión 3×4 significa que 3 se ha de sumar consigo mismo 4 veces, o también



que 4 se ha de sumar consigo mismo 3 veces. En ambos casos, la respuesta es la misma. Pero cuando se multiplican números con varias cifras estas sumas repetidas pueden ser bastante tediosas; sin embargo, la aritmética tiene procedimientos para simplificar estas operaciones.

2.5 División

La operación aritmética de la división es la operación recíproca o *inversa* de la multiplicación. Usando como ejemplo 12 dividido entre 4, la división se indica con el signo de dividir (12:4), una línea horizontal (\square) o una raya inclinada (12/4).

La división es la operación aritmética usada para determinar el número de veces que un número dado contiene a otro. Por ejemplo, 12 contiene a 4 tres veces; por eso 12 dividido entre 4 es 3, o \square es 3.

La mayor parte de las divisiones se pueden calcular a simple vista, pero en muchos casos es más complicado y se necesita un procedimiento conocido como división larga.

3 Leyes de los signos

Valor absoluto. Distancia en unidades recorridas sobre la recta numérica, del cero hacia el número en cuestión sin observar el sentido.

° Suma.

$$\begin{aligned} (+) + (+) &= + \text{ suma de valores absolutos.} & \text{-----} & (4) + (2) = 6 \\ (-) + (-) &= - \text{ suma de valores absolutos.} & \text{-----} & (-7) + (-10) = -17 \\ (+) + (-) &= \begin{cases} \text{signo de él número con mayor valor absoluto.} \\ \text{El valor numérico de la operación es la diferencia de valores absolutos.} \end{cases} & & (20) + (-13) = 7 \\ (-) + (+) &= \end{aligned}$$

° Producto

$$\begin{aligned} (+) (+) &= + \text{ Valor numérico productos de los valores absolutos} & (3) (4) &= 12 \\ (-) (-) &= + & (-6) (-5) &= 30 \\ (+) (-) &= - & (9) (-2) &= 18 \\ (-) (+) &= - & (-10) (4) &= -40 \end{aligned}$$

° Cociente

$$\begin{aligned} +/+ &= + \\ -/- &= + \text{ Valor numérico división de los valores absolutos.} & 8 / 2 &= 4 \\ +/- &= - & -35 / -5 &= 7 \\ -/+ &= - & 12 / -4 &= -3 \\ & & -72 / 3 &= -24 \end{aligned}$$

° Sustracción

$$\begin{aligned} (+) - (+) &= + - & (4) - (3) &= 1 \\ (-) - (-) &= - + & (-9) - (-25) &= 16 \\ (+) - (-) &= + + & (10) - (-10) &= 20 \\ (-) - (+) &= - - \text{ se invierte el signo de él sustraendo y se aplica leyes} & (-14) - (16) &= 30 \end{aligned}$$



de signos para la suma.

Ejemplos

- 1) $[-2+6-4+9] + [-7+10-12+13] - [-4+6-16] = [15-6]+[23-19]-[6-20] = [9]+[4]-[-14] = 9+4+14 = \underline{27}$
- 2) $[(-4+3-9+10)(6-10+25+4)] - [(-3+5+15-30)-(11+4-5)] = [(13-13)(35-10)] - [(20-33)-(15-5)] = [(0)(25)] - [(-13)-(10)] = -[-13-10] = -[-23] = \underline{23}$
- 3) $[(-2+4-16+20) \div (-16+15+17-14)] + [(4+3-13)-(9+3)] = [(24-18) \div (32-30)] + [(7-13)-(12)] = [(6) \div (2)] + [-6-12] = [3] + [-18] = \underline{-15}$

3.1 Teorema fundamental de la aritmética

“Todo entero mayor que 1 y que no sea un número primo es igual al producto de un y sólo un conjunto de números primos”. Este teorema fue demostrado por primera vez por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Dado un cierto número, por ejemplo 14, el teorema dice que se puede escribir de manera única como el producto de sus factores primos, en este caso $14 = 2 \cdot 7$. De la misma manera, $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$. El menor múltiplo y el mayor divisor común a varios números se pueden calcular utilizando sus descomposiciones en factores primos.

3.2 Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor número que puede ser dividido exactamente por todos y cada uno de ellos. El m.c.m. contiene todos los factores primos que aparecen en cada uno de los números dados. Por ejemplo, para encontrar el m.c.m. de tres números 27, 63 y 75, primero se descomponen en factores: $27 = 3^3$, $63 = 3^2 \cdot 7$, y $75 = 3 \cdot 5^2$. El m.c.m. debe contener los factores 3^3 , 7 y 5^2 ; por tanto, $3^3 \cdot 7 \cdot 5^2 = 4.725$ es el menor número que se puede dividir exactamente entre 27, 63 y 75.

3.3 Máximo común divisor

El mayor divisor común a un conjunto dado de números es su máximo común divisor (M.C.D.). Por ejemplo, dados 9, 15 y 27, el M.C.D. es 3, que se encuentra fácilmente examinando la descomposición en factores de cada uno de los números: $9 = 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$, $27 = 3^3$; el único factor que aparece en los tres números es 3.



4 FRACCIONES

Los números que representan partes de un todo se denominan números racionales, fracciones o quebrados. En general, las fracciones se pueden expresar como el cociente de dos números enteros a y b :

$$\frac{a \text{ (numerador)}}{b \text{ (denominador)}}$$

Una fracción está en su forma reducida o canónica si el numerador y el denominador no tienen un factor común. Por ejemplo, $\frac{6}{8}$ no está en su forma reducida pues ambos, 6 y 8, son divisibles por 2: $\frac{6}{8} = \frac{(2 \cdot 3)}{(2 \cdot 4)}$; sin embargo, $\frac{3}{4}$ es una fracción en su forma canónica.

Existen dos tipos de fracciones, propias e impropias. Una *fracción propia* es aquella en la que el numerador es menor que el denominador; $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ son todas ellas fracciones propias. Una *fracción impropia* es aquella en que el numerador es mayor que el denominador; $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$ son fracciones impropias. Las fracciones impropias se pueden convertir en números mixtos o en enteros (por ejemplo, $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$) si se divide el numerador por el denominador y el resto se expresa como una fracción del denominador.

Suma

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{3}{4} + \frac{6}{7} = \frac{21+24}{28} = \frac{45}{28} \\ 2) \quad & 3\frac{1}{2} + 5\frac{7}{9} = \frac{7}{2} + \frac{52}{9} = \frac{63+104}{18} = \frac{167}{18} \end{aligned}$$

RESTA

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{7}{5} - \frac{2}{3} = \frac{21-10}{15} = \frac{11}{15} \\ 2) \quad & 16\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3} = \frac{33}{2} - \frac{14}{3} = \frac{99-28}{6} = \frac{26}{6} \end{aligned}$$



PRODUCTO

$$\left(4 \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{13}{3}\right) \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{26}{27}$$
$$\left(\frac{7}{8}\right) (4) = \frac{28}{8}$$

DIVISION

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$$
$$\frac{7}{5} \div \frac{9}{8} = \frac{56}{45}$$

5 DECIMALES

El concepto de valores posicionales se puede extender para incluir a las fracciones. En vez de escribir $\frac{1}{10}$, o dos décimos, se puede utilizar una coma decimal (,) de manera que 0,2 representa también a la fracción. Del mismo modo que las cifras a la izquierda de la coma representan las unidades, decenas, centenas..., aquéllas a la derecha de la coma representan los lugares de las décimas (σ), centésimas (τ), milésimas ($1/1.000$) y así sucesivamente. Estos valores posicionales siguen siendo potencias de 10, que se escriben como 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} ... En general, un número como 5.428,632 se denomina quebrado o *fracción decimal*, y 0,632 representa

Este número se lee
cuatrocientos
seiscientos treinta y

$$6(10^{-1}) + 3(10^{-2}) + 2(10^{-3})$$

décimas centésimas milésimas

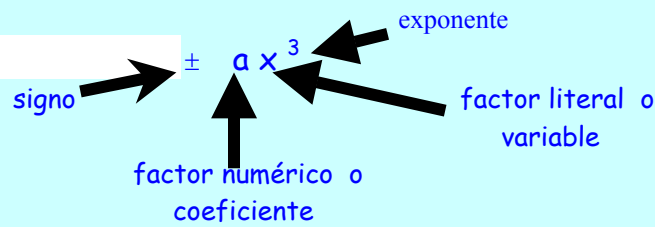
como: "cinco mil
veintiocho coma
dos".

Álgebra

1 INTRODUCCIÓN

Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces.

Expresiones algebraicas.- Son cantidades que se representan por números constantes y por letras que también representan cantidades. Toda expresión algebraica debe contener los siguientes elementos:



La expresión algebraica anterior es la más simple y es denominada término.

Términos semejantes.- Son aquellos que tienen él o los mismos factores literales y cada uno de ellos tiene respectivamente el mismo exponente.

Son términos semejantes: $3x^2y^2z$ y $-\frac{1}{3}y^2zx^2$

NO son términos semejantes: $-\frac{1}{2}a^2b^2c$ y $\frac{2}{5}ab^2c^2$

ADICIÓN O SUMA

La suma de expresiones algebraicas se obtiene agrupando los términos semejantes y reduciendo los coeficientes, poniendo mucha atención a los signos de cada término.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} &(3x^2 + 6x - 4 + 2xy) + (3 - 4x + 3yx - 9x^2) = \\ &\quad + \quad \begin{array}{r} 3x^2 + 6x + 2xy - 4 \\ - 9x^2 - 4x + 3yx + 3 \\ \hline - 6x^2 + 2x + 5xy - 1 \end{array} \end{aligned}$$

Si se tienen coeficientes fraccionarios el procedimiento es exactamente el mismo:

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x + 6) + (-\frac{2}{3} + 4x + \frac{1}{2}x^4) = \\ &\quad + \quad \begin{array}{r} \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x + 6 \\ \frac{1}{2}x^4 + 4x - \frac{2}{3} \\ \hline \frac{5}{6}x^4 + \frac{18}{5}x + \frac{16}{3} \end{array} \end{aligned}$$

SUSTRACCIÓN O RESTA

Se realiza la misma agrupación que para la suma, el cambio que presenta la sustracción es la inversión de signos en cada término del sustraendo.

$$\begin{aligned}
 & (-3x + 6x^2 - 9x^3 + 6xy) - (2x^2 + 3x^3 - 9xy + 3) = \\
 & (-3x + 6x^2 - 9x^3 + 6xy) - 2x^2 - 3x^3 + 9xy - 3 = \\
 & \quad \quad \quad -9x^3 + 6x^2 - 3x + 6xy \\
 & \quad \quad \quad + \frac{-3x^3 - 2x^2 \quad \quad + 9xy - 3}{-12x^3 + 4x^2 - 3x + 15xy - 3}
 \end{aligned}$$

PRODUCTO Ó MULTIPLICACIÓN.

Para el producto de expresiones algebraicas se utiliza la propiedad distributiva de los números reales; $a(b + c) = ab + ac$ y $a(b - c) = ab - ac$, es decir, se multiplica cada término del 1^{er} factor por cada término del 2^{do} factor, el producto realizado anteriormente tiene que implicar las leyes de los signos y las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 & (-3x + 6 - 4x^2 - \frac{1}{2}y) (\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}) = \\
 & = -\frac{9}{2}x^3 - 9x^2 + x + 9x^2 + 18x - 2 - 6x^4 - 12x^3 + 4/3x^2 - 3/4yx^2 - 3/2xy + 1/6y = \\
 & = -6x^4 - 33/2x^3 + 4/3x^2 - 3/4x^2y - 3/2xy + 19x + 1/6y - 2
 \end{aligned}$$

Independientemente de él número de términos de ambos factores, el producto se realiza: cada término del primer factor por cada término del segundo factor.

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
 & (3x + 6y^2 - 2x^2) (-2 + 6x^2 + 3x) = \\
 & = -6x + 18x^3 + 9x - 12y^2 + 36x^2y^2 + 18xy^2 + 4x^2 - 12x^4 - 6x^3 = \\
 & = -6x + 12x^3 - 12y^2 + 36x^2y^2 + 18xy^2 + 13x^2 - 12x^4 = \\
 & = -12x^4 + 12x^3 + 36x^2y^2 + 13x^2 - 6x + 18xy^2 - 12y^2
 \end{aligned}$$

PRODUCTOS NOTABLES

$$1) \quad (a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ba + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Binomio al cuadrado = Trinomio Cuadrado Perfecto

"El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término".

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
 (3x - 4)^2 &= 9x^2 - 24x + 16 \\
 (x^2 + 5x)^2 &= x^4 + 10x^3 + 25x^2
 \end{aligned}$$

$$2) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Binomios conjugados = Diferencia de cuadrados

"El producto de binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término".

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 (x + y)(x - y) &= x^2 - y^2 \\
 (3x + 4)(3x - 4) &= 9x^2 - 16 \\
 (2y^2 - 6)(2y^2 + 6) &= 4y^4 - 36
 \end{aligned}$$

$$3) \quad (a + b)(a + c) = a^2 + ac + ba + bc = a^2 + (b + c)a + bc$$

Binomios con Término Común = Trinomio de 2^{do} grado o Cuadrático

"El producto de binomios con término común es igual al cuadrado del primer término, más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común más el producto de los términos no comunes".

$$ax + bx + ay + by$$

$$x(a+b) + y(a+b)$$

Como la expresión obtenida es un binomio que tiene un factor común, que es $(a+b)$ se factoriza nuevamente:

$$(a+b)(x+y)$$

Ejemplo:

$$x^2 + 5x + 4x + 20$$

$$(x^2 + 5x) + (4x + 20)$$

$$x(x + 5) + 4(x + 5)$$

$$(x + 5)(x + 4)$$

FACTORIZACION DE PRODUCTOS NOTABLES

Trinomio Cuadrado Perfecto.- Un trinomio es cuadrado perfecto si el doble producto de las raíces de los extremos produce el término lineal o medio. Por lo tanto para factorizarlo únicamente se colocan las raíces en un paréntesis con el signo del término lineal, y el conjunto elevado al cuadrado.

Teniéndose : $x^2 + 10x + 25$

Aplicando el criterio anterior:

- 1) Las raíces de los extremos son: x y 5 respectivamente.
- 2) El doble producto de las raíces es: $2(5x) = 10x$
- 3) Podemos decir que el trinomio es cuadrado perfecto, por lo tanto la factorización es:
 $(x + 5)^2$ ó $(x + 5)(x + 5)$

Otro ejemplo:

Teniendo: $49y^2 - 42y + 9$

- 1) Las raíces son: $7y$ y 3
- 2) El doble producto es: $2(7y * 3) = 2(21y) = 42y$
- 3) De aquí se observa que es T.C.P por lo tanto:
 $(7y - 3)^2$ ó $(7y - 3)(7y - 3)$

Trinomio de 2^{do} grado o cuadrático.

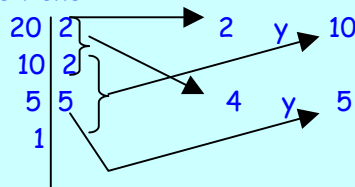
1^{er} caso.- Un trinomio es cuadrático cuando NO cumple el criterio anterior, por lo tanto se buscaran dos números que sumados proporcionen el coeficiente del término lineal incluyendo el signo y multiplicados el término constante también incluyendo su signo. Para encontrarlos más fácilmente se descompone en factores primos el número resultante del producto y se forman pares de números con los factores.

Teniéndose: $x^2 + 9x + 20$

$$() + () = 9$$

$$() () = 20$$

Descomponiendo en factores primos se tiene:



Los números que buscamos son 4 y 5 ambos positivos y como el coeficiente del término cuadrático es 1, se obtiene la raíz de dicho término y se coloca en dos paréntesis con los números encontrados, es decir:

$$(x + 4)(x + 5)$$

obteniendo así la factorización del trinomio.



2^{do} Caso.- Cuando el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno, se multiplica dicho coeficiente y el término independiente, para después encontrar dos números que sumados proporcionen el coeficiente del término lineal y multiplicados el producto obtenido anteriormente. Terminado el proceso se siguen los pasos del primer caso.

Dado: $9x^2 - 15x - 14$
 $() + () = -15$
 $() () = -126$

por lo tanto:

126	2	6	y	21
63	3			
21	3	9	y	14
7	7			
1		2	y	63

Los números que se buscan son el 6 y el -21, por lo tanto se colocan los números anteriores en el trinomio considerándolos como coeficientes de términos lineales quedando:

$$9x^2 + 6x - 21x - 14$$

Factorizando por agrupación la expresión obtenida:

$$(9x^2 + 6x) - (21x - 14)$$
$$3x(3x + 2) - 7(3x + 2)$$
$$(3x + 2)(3x - 7)$$

Siendo la última expresión el resultado de la factorización.

El álgebra clásica se ocupa de resolver **ecuaciones**,

1

Ecuaciones

Ecuación, igualdad en la que intervienen una o más letras, llamadas incógnitas. Es decir, es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los miembros de la ecuación: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha.

Se llama solución de una ecuación a un valor de la incógnita, o a un conjunto de valores de las incógnitas, para los cuales se verifica la igualdad. Una ecuación puede tener una, ninguna o varias soluciones. Por ejemplo:

$3x - 7 = x + 1$ es una ecuación con una incógnita. Tiene una única solución: $x = 4$.

$x^2 + y^2 + 5 = 0$ es una ecuación con dos incógnitas sin solución, pues la suma de dos cuadrados es un número positivo a partir del cual no se puede obtener 0 sumándole 5.



$2x + 3y = 15$ es una ecuación con dos incógnitas que tiene infinitas soluciones, algunas de las cuales son $x = 0, y = 5$; $x = 3, y = 3$; $x = 30, y = -15$.

Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución. Así, la ecuación $3x - 7 = x + 1$ es equivalente a $2x - 8 = 0$ porque ambas tienen como solución única $x = 4$.

2

TIPOS DE ECUACIONES

Las ecuaciones con una incógnita suelen tener un número finito de soluciones. Las ecuaciones con varias incógnitas, sin embargo, suelen tener infinitas soluciones; por ello, estas ecuaciones interesa estudiarlas cuando forman sistemas de ecuaciones. Las ecuaciones con una incógnita pueden ser de distintos tipos: polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas...

Las ecuaciones polinómicas son de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio en x . O bien, son de tal forma que al trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión. $3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ es una ecuación polinómica.

Las ecuaciones polinómicas de primer grado, $ax + b = 0$, se llaman ecuaciones lineales. $5x + 7 = 3$ es lineal y también lo es $(x - 5)^2 + 3 = x^2 - 1$ porque al desarrollar y simplificar se obtiene $-10x + 29 = 0$.

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, se llaman cuadráticas. Son ecuaciones de este tipo: $x^2 - 5x + 3 = 0$, $(x - 2)^2 + 7x = 5 + x$.

Las ecuaciones radicales son aquellas en las que la incógnita está bajo un signo radical, como

$$\sqrt{x+1} - 3x + 2 = 5$$

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen cocientes de polinomios; por ejemplo:



$$\left| \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x+3} = x-1 \right|$$

En las ecuaciones exponenciales la incógnita está en un exponente:

$$2^x + 4^{x+1} - 18 = 0$$

En las ecuaciones trigonométricas la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica; por ejemplo:

$$\text{sen}(p/4 + x) - \cos x = 1$$

3

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es hallar su solución o soluciones, o bien concluir que no tiene solución. Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya fisonomía sea más sencilla. Así, mediante una serie de pasos sucesivos se llega a una última ecuación del tipo $x = s$ en la que la incógnita está despejada (es decir, aislada en el primer miembro), con lo que la solución es evidente.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $5x - 6 = 3x + 12$ se procede como se explica a continuación.

Para pasar los términos en x al primer miembro y los números al segundo miembro, se resta en ambos miembros $3x$ y se suma 6, con lo que queda:

$$5x - 3x = 12 + 6$$

Y simplificando, $2x = 18$.

Para despejar la x se divide por 2 en ambos miembros:

$$x = 18/2 = 9$$

La solución es, evidentemente, $x = 9$.

Sin embargo, hay tipos de ecuaciones para cuya resolución se requieren técnicas especiales. Es el caso, por ejemplo, de las ecuaciones cuadráticas y bicuadradas.

3.1

Resolución de ecuaciones cuadráticas

La expresión general de una ecuación cuadrática (polinomio de segundo grado) es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a \neq 0$. Para resolverla se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ de coeficientes $a = 2$, $b = 5$, $c = -3$, se resuelve así:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 1/2$; $x_2 = -3$.

Esta misma ecuación se podría haber resuelto despejando la x . Para ello, se multiplica la ecuación por 2:

$$4x^2 + 10x - 6 = 0$$

Se pasa el 6 al segundo miembro:

$$4x^2 + 10x = 6$$

Se suman $25/4$ para completar un cuadrado perfecto (el cuadrado de una suma) en el primer miembro:

$$4x^2 + 10x + 25/4 = 6 + 25/4$$

Simplificando:

$$(2x + 5/2)^2 = 49/4$$



Extrayendo la raíz cuadrada y recordando que si $A^2 = B^2$ entonces $A = \pm B$:

$$2x + 5/2 = \pm 7/2$$

Como consecuencia del signo \pm , la igualdad da lugar a dos ecuaciones:

$$2x + 5/2 = 7/2$$

$$2x + 5/2 = -7/2$$

Resolviéndolas se obtiene:

$$4x + 5 = 7 \quad \square \quad 4x = 2 \quad \square \quad x_1 = 1/2$$

$$4x + 5 = -7 \quad \square \quad 4x = -12 \quad \square \quad x_2 = -3$$

Siguiendo este largo proceso se obtienen las mismas soluciones que mediante la fórmula inicial. Es claro que la aplicación de ésta es un procedimiento mucho más cómodo. De hecho, la fórmula se obtiene algebraicamente a partir de la ecuación general mediante un proceso similar al que se ha seguido para resolver esta ecuación concreta.

Las ecuaciones de segundo grado de los tipos siguientes se llaman incompletas porque les falta uno de los términos:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

Se pueden resolver aplicando la fórmula general, pero es más cómodo resolverlas despejando directamente la x .

En el primer caso,

$$ax^2 + bx = 0 \quad \square \quad (ax + b)x = 0$$

Una solución es $x = 0$ y la otra se obtiene resolviendo la ecuación lineal $ax + b = 0$. Por ejemplo:

$$3x^2 + 5x = 0 \quad \square \quad (3x + 5)x = 0$$

Las soluciones son: $x = 0$; $x = -5/3$.

En el segundo caso,

$$ax^2 + c = 0 \quad \square \quad ax^2 = -c \quad \square \quad x^2 = -c/a$$

$$x = \pm \sqrt{-c/a}$$

Por ejemplo:

$$3x^2 - 17 = 0 \quad \square \quad 3x^2 = 17$$

$$x = \pm \sqrt{17/3}$$

Las soluciones son:

$$x = -\sqrt{17/3} ; x = \sqrt{17/3}$$

32

Resolución de
ecuaciones
bicuadradas

Se llama bicuadrada la ecuación de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

es decir, una ecuación polinómica de cuarto grado que no tiene términos de grado impar. Si se realiza el cambio de variable $x^2 = y$, con lo cual $x^4 = y^2$, entonces se transforma en una ecuación de segundo grado:

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (2)$$

Cada una de sus soluciones puede dar lugar a dos, una o ninguna solución de la ecuación inicial. Así, si y es solución de la ecuación (2), se verifica que:

si $y_1 > 0$, entonces $x_1 = \sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$ son raíces de (1);

si $y_1 = 0$, también $x_1 = 0$ es raíz de (1);

si $y_1 < 0$, $x^2 = y_1$ no da lugar a ninguna solución real de x .

Por ejemplo, la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - x^2 - 12 = 0$$

se transforma, mediante el cambio de variable $x^2 = y$, en la ecuación de segundo grado:

$$y^2 - y - 12 = 0$$

Cuyas soluciones son

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$y_1 = 4, y_2 = -3$$

$$\text{Para } y_1 = 4: x^2 = 4$$

$$x = \pm \sqrt{4}$$

Luego, $x_1 = 2, x_2 = -2$ son soluciones de la ecuación bicuadrada.

$$\text{Para } y_2 = -3: x^2 = -3$$

$$x = \pm \sqrt{-3}$$

Por tanto, las únicas raíces de la ecuación $x^4 - x^2 - 12 = 0$ son $x_1 = 2, x_2 = -2$.

utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, se dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
<	menor que
≤	menor o igual que
>	mayor que
≥	mayor o igual que

Figura 1: signos de desigualdad

Una desigualdad es la relación entre números, ecuaciones, propiedades geométricas u otras expresiones que tienen valores distintos entre sí. Los signos que aparecen en esta tabla se utilizan para comparar valores de expresiones matemáticas desiguales.

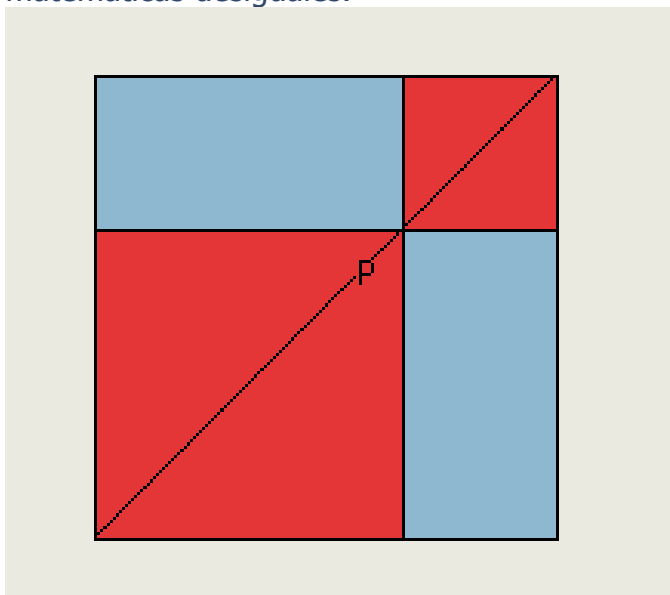


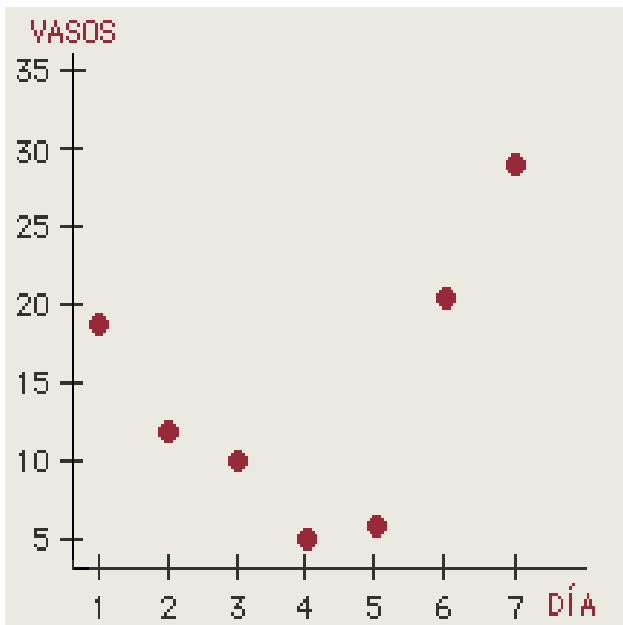
Figura 2: superficies desiguales

En este gráfico, los cuadrados rojos ocupan una superficie mayor que los rectángulos azules. Si el punto P , vértice común a las cuatro figuras, se mueve a una posición diferente en la diagonal del cuadrado total, las cuatro áreas cambian. Sin embargo, el área total de los cuadrados rojos es siempre mayor o igual que el área total de los rectángulos azules.

Desigualdad, relación matemática en la que se tiene en cuenta el orden de los números. La figura 1 muestra los símbolos utilizados para denotar una desigualdad. Por ejemplo, la desigualdad $3 < 10$ indica que el número 3 es menor que el 10; la desigualdad $x^2 \geq 0$ expresa el hecho de que el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero.

Las desigualdades aparecen a menudo al describir áreas y volúmenes. Por ejemplo, si P es un punto cualquiera de la diagonal del cuadrado de la figura 2, entonces el área de los dos rectángulos sombreados en azul es siempre menor o igual que (\leq) el área de los dos cuadrados sombreados en rojo.

Si una desigualdad contiene incógnitas, se denomina inecuación. Las soluciones de una inecuación como $-2x + 6 > 0$ son aquellos valores de la x para los que la expresión $-2x + 6$ es mayor que cero. Las reglas de resolución de ecuaciones del álgebra se pueden utilizar para resolver inecuaciones, con la condición de que el sentido de la desigualdad ha de invertirse si se multiplica o divide por números negativos. Por tanto, para resolver la inecuación $-2x + 6 > 0$, primero se resta 6 de ambos lados de la desigualdad, con lo que se obtiene $-2x > -6$. A continuación se dividen ambos lados de $-2x > -6$ por -2 , sin olvidarse de invertir el sentido de la desigualdad pues -2 es negativo. Esto da $x < 3$, lo que significa que cualquier valor de x menor que 3 es una solución de $-2x + 6 > 0$.



Gráficas

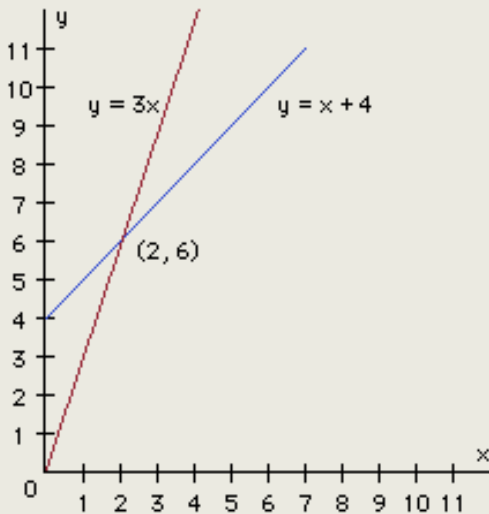
Figura 1: gráfica de puntos

Las gráficas dan una representación visual de ciertos datos. Esta gráfica muestra el número de vasos de gaseosa vendidos cada día a lo largo de una semana. La coordenada horizontal es el número del día. La coordenada vertical es el número de vasos vendidos.

Gráfica, diagrama que muestra relaciones entre números. Las gráficas organizan la información numérica en forma de figura de manera que es posible encontrar tendencias o patrones en la información.

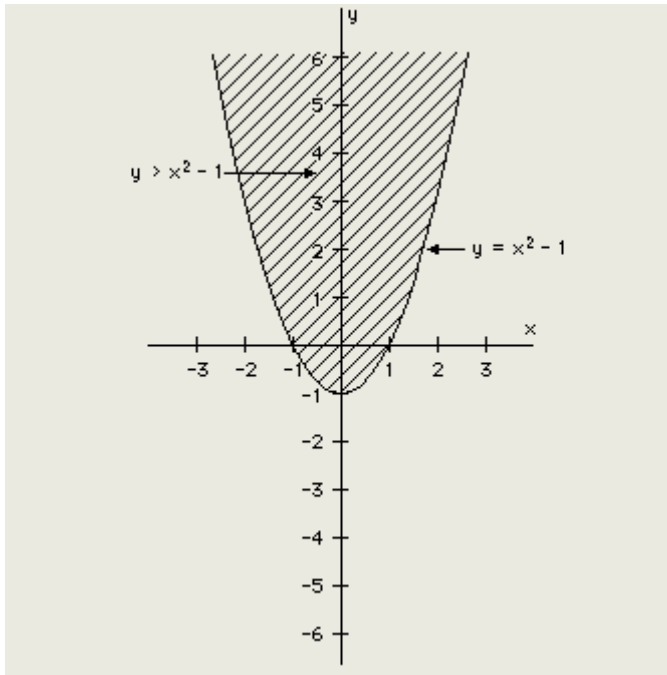
Figura 2: solución gráfica

Las gráficas son de gran ayuda para resolver sistemas de ecuaciones. En vez de resolver las dos ecuaciones matemáticamente, es posible representarlas en una gráfica y encontrar el punto de corte, que es la solución del sistema. Esta gráfica muestra que $x = 2$ e $y = 6$ es el punto de intersección de las ecuaciones $y = 3x$ e $y = x + 4$.



La gráfica de la figura 1 ilustra una tendencia de ventas. Esta gráfica muestra el número de vasos de gaseosa vendidos cada día de la semana. Para saber cuántos vasos se vendieron el tercer día, primero se busca el número 3 en el eje horizontal y después se toma el punto que está justo encima. La posición de este punto corresponde al valor 10 del eje vertical, lo que quiere decir que se vendieron 10 vasos el tercer día. En el primer día, es difícil saber exactamente cuántos vasos se vendieron, pero se observa que fue entre 15 y 20. Aunque esta gráfica, al igual que todas las gráficas, no tiene tanta exactitud como la lista numérica, sirve para ilustrar claramente la tendencia del incremento de ventas hacia el final de la semana.

La gráfica de la figura 2 ilustra un ejemplo de relaciones matemáticas. Se sabe que Yolanda tiene cuatro años más que Javier. Si se usa la y para representar la edad de Yolanda y la x para la de Javier, esta relación se puede escribir matemáticamente como $y = x + 4$. Una de las posibles parejas de valores de la x y la y es $x = 1$ e $y = 5$, pues $5 = 1 + 4$. Esta pareja de valores se escribe $(1, 5)$. El conjunto de todas las parejas (x, y) para las que se cumple $y = x + 4$ se han representado en la figura 2 con la línea de color azul.



son aquellos puntos para los que $y > x^2 - 1$.

Las gráficas se pueden utilizar también para resolver sistemas de ecuaciones. Supongamos que además de saber que Yolanda es cuatro años mayor que Javier, se sabe que la edad de Yolanda es tres veces la de Javier. La solución al problema es encontrar los valores de la x y de la y que cumplen las ecuaciones $y = x + 4$ e

Figura 3: representación gráfica de inecuaciones

La curva parabólica de esta gráfica está formada por todos los puntos del plano que satisfacen la ecuación $y = x^2 - 1$. El área sombreada dentro de la parábola

$y = 3x$ simultáneamente. En la figura 2, estas dos ecuaciones se han dibujado juntas, y la solución de este sistema de ecuaciones es el punto en que las dos gráficas se cortan, $(2,6)$, que equivale a decir que Javier tiene dos años y Yolanda seis.

Las gráficas se pueden utilizar también para mostrar desigualdades. La curva de la figura 3 es la gráfica de la parábola $y = x^2 - 1$. El área sombreada, excluyendo la propia curva, es la representación gráfica de la desigualdad $y > x^2 - 1$.



Elementos básicos de aritmética y algebra

RAZONES Y PROPORCIONES

Una razón equivale a un cociente, relación ó división.

Una proporción es una igualdad entre dos razones, relaciones, cocientes ó divisiones.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

MEDIA PROPORCIONAL

a_1 y b_2 Son los llamados extremos
 a_2 y b_1 son los llamados medios

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

TERCERA PROPORCIONAL O REGLA DE TRES

$$2 \rightarrow 6$$

$$(2)(x) = (6)(4)$$

$$4 \rightarrow x$$

$$x = 24 / 2$$

$$x = 12$$

TANTO POR CIENTO (Porcentajes)

Existen dos formas distintas de obtener el porcentaje de un numero determinado, las cuales son exactamente las mismas lo que cambia es la interpretación.

¿Cuál es el 35% de 129?

1) Se realiza el producto del número divide entre por él porcentaje que se quiere obtener.

2) El producto obtenido se divide entre 100.

$$\begin{array}{r} 129 \\ \times 35 \\ \hline 645 \\ \underline{387} \\ 4515 \end{array}$$

$$\frac{4515}{100} = 45.15$$

3) El 35% de 129 es: 45.15

La Segunda Forma es:

¿Cuál es el 43% de 536?

1) Se divide el valor de él porcentaje entre cien.

$$43 \div 100 = 0.43.$$

2) El cociente se multiplica por él numero al cual corresponde el porcentaje.

$$536 * 0.43 = 230.48.$$

3) El producto obtenido es el 43% de 536

LEYES DE LOS EXPONENTES

$$1) a^n * a^m = a^{n+m} \quad 3^2 * 3^6 = 3^8 \quad ; \quad x^4 * x^{-1} = x^3$$

$$2) (a * b)^n = a^n b^n \quad (2 * 5)^3 = 2^3 * 5^3 \quad ; \quad (xy)^2 = x^2 y^2$$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{4^2}{2^2} ; \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$$

$$4) (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (3^2)^5 = 3^{10} ; (x^2)^4 = x^8$$

$$5) a^1 = a \quad 3^1 = 3 ; x^1 = x$$

$$6) a^0 = 1 \quad 9^0 = 1 ; x^0 = 1$$

$$7) a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} \quad 3^{4/3} = \sqrt[3]{3^4} \quad x^{3/2} = \sqrt{x^3}$$

Geometría

1 INTRODUCCIÓN

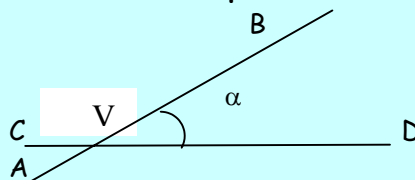
Geometría (del griego *geō*, 'tierra'; *metrein*, 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

3 Geometría Euclidiana y Trigonometría

Para estudiar la geometría necesitamos conocer ciertos conceptos, los cuales se presentan a continuación.

Recta. - Es el conjunto de puntos que se extiende sin límite en ambos sentidos.

Ángulo. - Es la figura formada por todos los puntos de dos rayos distintos que emanan del mismo origen. Otra definición es: Un ángulo es la apertura o espacio formado entre la intersección de dos segmentos de recta; el punto de intersección es el vértice.



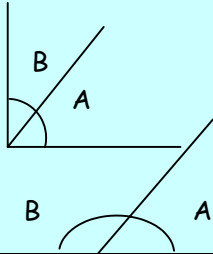
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS.

De acuerdo a su apertura:

\angle s menores de 90° : Ángulos agudos.

- \angle s iguales a 90° : Ángulos rectos.
- \angle s mayores de 90° y menores de 180° : Ángulos obtusos.
- \angle s iguales a 180° : Ángulos Llanos.
- \angle s iguales a 360° : Ángulos Perigonales.

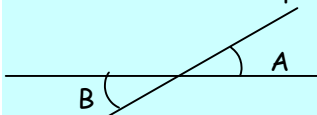
De acuerdo a su suma:



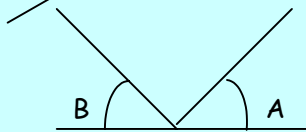
Cuando $A + B = 90^\circ$ se dice que A y B son **COMPLEMENTARIOS**.

Cuando $A + B = 180^\circ$ se dice que A y B son **SUPLEMENTARIOS**.

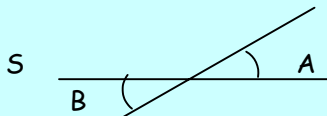
De acuerdo a su posición:



A y B son opuestos por el vértice.

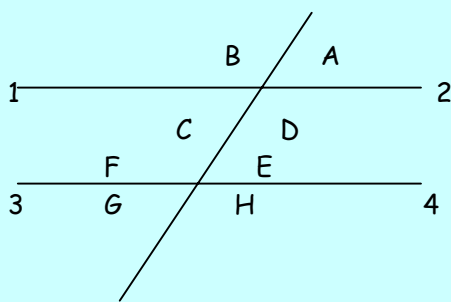


A y B son colineales.



A y B son alternos con respecto a la recta S.

Ángulos entre rectas paralelas interceptadas por una secante u oblicua.



Se tienen:

Ángulos alternos externos

A y G $A = G$

\therefore

B y H $B = H$

Ángulos Iguales

$A = E$ $B = F$
 $D = H$ $C = G$

Ángulos alternos internos

C y E $C = E$

\therefore

D y F $D = F$

TRIANGULOS

El triángulo es un polígono de tres lados y tres ángulos cuyo perímetro es: $L_1 + L_2 + L_3$ y de área: $(b * h) / 2$.

Cuando:

- $L_1 = L_2 = L_3$ es un triángulo Equilátero.
- $L_1 = L_2 \neq L_3$ es un triángulo Isósceles.
- $L_1 \neq L_2 \neq L_3$ es un triángulo Escaleno.

Cuando en un triángulo:



- $\angle s < 90^\circ \Rightarrow$ Triángulo Acutángulo.
 $1 \angle = 90^\circ \Rightarrow$ Triángulo Rectángulo.
 $1 \angle > 90^\circ \Rightarrow$ Triángulo Obtusángulo.

Propiedades de los triángulos.

- 1.- La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° .
- 2.- En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa. Dichos ángulos y lados se llaman homólogos.
- 3.- En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.
- 4.- En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
- 5.- En todo triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales y cada uno vale 60° .
- 6.- En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes.
- 7.- En todo triángulo la suma de los ángulos exteriores es igual a 360° .
- 8.- En todo triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios y la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
- 9.- Todo triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.
- 10.- En todo triángulo isósceles, los ángulos contiguos a la base son iguales.

CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Congruencia.- Un triángulo es congruente o igual a otro, si tiene todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro triángulo.

Postulados de Congruencia (igualdad).

Postulado L - A - L.- Dos triángulos que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre

ellos también igual, son congruentes.

Postulado A - L - A.- Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos también igual, son congruentes.

Postulado L - L - L.- Dos triángulos que tienen los tres lados respectivamente iguales son congruentes.

Postulados de Semejanza.

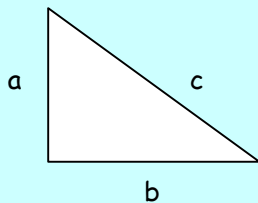
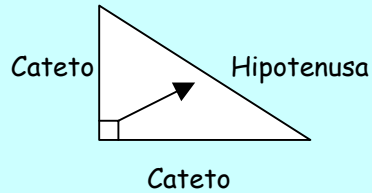
Postulado A - A.- Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Postulado L - A - L.- Dos triángulos son semejantes, si tienen un ángulo respectivamente igual y

proporcionales los lados que los forman.

Postulado L - L -L.- Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

ANÁLISIS DE LOS TRIÁNGULOS. Triángulos Rectángulos.



Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

“ El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ”.

$$A + B + C = 180^\circ$$

“ La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° ”.

Funciones Trigonómicas.- Son aquellas reglas de correspondencia que relacionan los lados con los ángulos en un triángulo Rectángulo.

$$\text{Seno} = \frac{\text{Cat.}_{\text{opuesto}}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno} = \frac{\text{Cat.}_{\text{adyacente}}}{\text{Hipotenusa}}$$

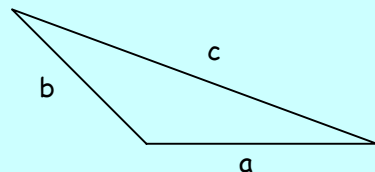
$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cat.}_{\text{opuesto}}}{\text{Cat.}_{\text{adyacente}}}$$

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{Cat.}_{\text{adyacente}}}{\text{Cat.}_{\text{opuesto}}}$$

$$\text{Secante} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat.}_{\text{adyacente}}}$$

$$\text{Cosecante} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat.}_{\text{opuesto}}}$$

Triángulos Oblicuángulos.- Son aquellos triángulos acutángulos y obtusángulos.



$$A + B + C = 180^\circ$$

Ley de Senos.

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Ley de Cosenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } C$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \text{ Cos } A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \text{ Cos } B$$

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ grados	θ radianes	Sen θ	Cos θ	Tang θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
0°	0	0	1	0	-	1	-
30°	$\pi / 6$	1 / 2	$\sqrt{3} / 2$	$1 / \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2 / \sqrt{3}$	2
45°	$\pi / 4$	$\sqrt{2} / 2$	$\sqrt{2} / 2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi / 3$	$\sqrt{3} / 2$	1 / 2	$\sqrt{3}$	$1 / \sqrt{3}$	2	$2 / \sqrt{3}$
90°	$\pi / 2$	1	0	-	0	-	1

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidades de Recíprocos.

$$\text{Sen } A * \text{Csc } A = 1$$

$$\text{Tang } A * \text{Cotg } A = 1$$

$$\text{Cos } A * \text{Sec } A = 1$$

Identidades de División.

$$\text{Tang } A = \frac{\text{Sen } A}{\text{Cos } A}$$

$$\text{Cotg } A = \frac{\text{Cos } A}{\text{Sen } A}$$

Identidades de Cuadrados.

$$\text{Sen}^2 A + \text{Cos}^2 A = 1$$

$$\text{Csc}^2 A = 1 + \text{Cotg}^2 A$$

$$\text{Sec}^2 A = 1 + \text{Tang}^2 A$$

Identidades de Suma y Diferencia de dos Ángulos.

$$\text{Sen } (A \pm B) = \text{Sen } A \text{ Cos } B \pm \text{Sen } A \text{ Cos } B$$

$$\text{Cos } (A \pm B) = \text{Cos } A \text{ Cos } B \mp \text{Sen } A \text{ Sen } B$$

$$\text{Tang } (A \pm B) = \frac{\text{Tang } A \pm \text{Tang } B}{1 \mp \text{Tang } A \text{ Tang } B}$$

Identidades del Doble de un Ángulo

$$\text{Sen } 2A = 2 \text{ Sen } A \text{ Cos } A$$

$$\text{Cos } 2A = \text{Cos}^2 A - \text{Sen}^2 A = 1 - 2 \text{ Sen}^2 A = 2 \text{ Cos}^2 A - 1$$

$$\text{Tang } 2A = \frac{2 \text{ Tang } A}{1 - \text{Tang}^2 A}$$

Otras Identidades Importantes.

$$\text{Sen}^2 A = \frac{1 - \text{Cos } 2A}{2}$$

$$\text{Cos}^2 A = \frac{1 + \text{Cos } 2A}{2}$$

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre expresiones de un mismo ángulo que solo se satisface para determinado valor o valores de ángulo. No hay que confundir una ecuación trigonométrica con una igualdad trigonométrica, ya que la ecuación se cumple únicamente para determinados valores y la igualdad para cualquier valor de ángulo.

No existen métodos generales para la solución de ecuaciones trigonométricas, en muchos casos esto depende de la agudeza y la experiencia de la persona, pero puede empezarse por transformar la ecuación trigonométrica en alguna otra equivalente más sencilla y luego resolver por los procesos algebraicos correspondientes.

Por ejemplo:

$$\text{Sen}(x) - 2 \text{Sen}(x) \text{Cos}(x) = 0 \quad \text{para}$$

Primero factoricemos el factor común $\text{Sen}(x)$:

$$\text{Sen}(x) [1 - 2 \text{Cos}(x)] = 0$$

De la expresión anterior se puede observar que se cumple la igualdad cuando alguno de los dos factores sea cero de lo que se puede deducir que:

$$\text{Si } \text{Sen}(x) = 0 \quad \text{entonces } x = 0 \text{ y/o } x = \pi$$

$$\text{y } 1 - 2 \text{Cos}(x) = 0 \quad \text{entonces } \text{Cos}(x) = \frac{1}{2} \text{ lo que implica que } x = \frac{\pi}{3} \text{ y/o } x = \frac{5}{3}\pi$$

por lo tanto las soluciones buscadas para $0 \leq x < 2\pi$ son:

$$x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi \text{ y } \frac{5}{3}\pi$$

Se puede verificar si los valores son ciertos si se sustituyen en la ecuación original uno por uno.

POLÍGONOS

Polígono.- Es la porción de un plano, que se encuentra limitado por líneas rectas, llamadas lados.

Clasificación.

De acuerdo al número de lados.

3 lados → Triángulo.

4 lados → Cuadrilátero.

5 lados → Pentágono.

6 lados → Hexágono.

7 lados → Heptágono.

8 lados → Octágono.

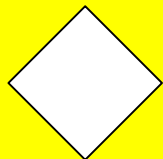
9 lados → Eneágono.

10 lados → Decágono.

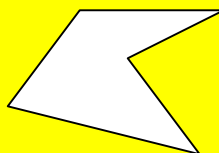
Pueden ser:

Convexos.- Si todos sus ángulos interiores son menores de 180° .

Cóncavos.- Si tiene por lo menos un ángulo interior mayor de 180° .



Convexo



Cóncavo

También se clasifican en:

- Equilátero.- Todos sus lados iguales.
- Equiángulo.- Todos sus ángulos iguales.
- Regular.- Es a la vez equilátero y equiángulo.
- Irregular.- Cuando No cumple lo anterior.

Propiedades.

Perímetro.- Es la suma de las medidas de sus lados.

Diagonal.- Es el segmento de recta que une un vértice con otro vértice no consecutivo.

Vértice.- Punto de unión de dos lados.

Apotema (En un polígono regular).- Es el segmento de recta perpendicular trazada desde el centro del polígono a uno de sus lados.

Teoremas.

"La suma de los ángulos interiores de un polígono, es igual a: $S_{int} = 180 (n - 2)$ ".

"La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360° ".

"El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a:

$$D = \frac{n * (n - 3)}{2} \quad n = \text{número de lados.}$$

CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO.

Circunferencia.- Es una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

Círculo.- Es la superficie plana limitada por la circunferencia.

Rectas y Puntos Importantes:

O Centro.

OR (Radio).- Recta que une al centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

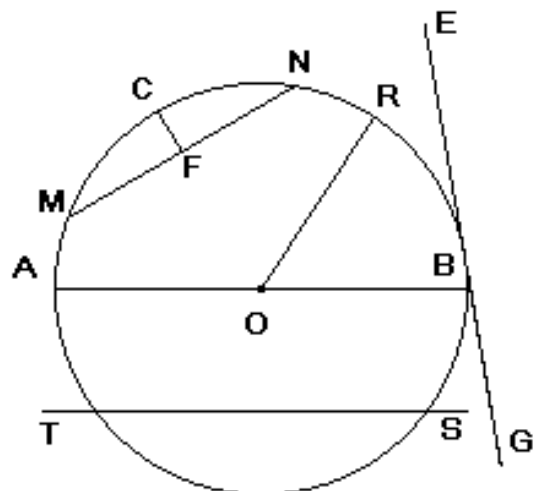
AB (Diámetro).- Es la recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

MCN (Arco).- Parte cualquiera de la circunferencia.

MN (Cuerda).- Es toda recta que une dos puntos de la circunferencia.

TS (Secante).- Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

EG (Tangente).- Es una recta que tiene un solo punto en común con la circunferencia.



B (Punto de Tangencia).- Es el punto donde la tangente toca a la circunferencia.

CF (Flecha).- Es la parte de radio, perpendicular en el punto medio de una cuerda, comprendida entre está y el arco.

LOGARITMOS.

Los logaritmos se definen como:

Si " a " es un número positivo (> 0) distinto de 1 y " x " es un número real en la ecuación $a^x = y$; entonces " x " es llamado el logaritmo de " y " en base " a ".

Es decir:

$$a^x = y$$

$$x = \log_a y$$

El LOGARITMO de un NUMERO " y " es el exponente al que hay que elevar la base " a " para obtener el valor " y ".

Esto implica que se puede llevar una función exponencial a una función logarítmica y viceversa, por ejemplo:

$$5^3 = 125$$

$$\log_5 125 = 3$$

Existen dos tipos básicos de logaritmos, los llamados logaritmos de BRIGGS, comunes, vulgares o decimales y los llamados logaritmos de NEPER o logaritmos naturales, ambos tipos siguen la misma definición de logaritmo, la diferencia es la base que se toma para cada uno de ellos, en el primer caso la base de la potencia es 10 y en el segundo caso es el número e, el cual tiene un valor de 2.71828182..., a continuación se presentan las leyes que rigen las operaciones con logaritmos.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

$$1) \log_c (a b) = \log_c a + \log_c b$$

$$2) \log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

$$3) \log_c a^n = n \log_c a$$

$$4) \log_c \sqrt[n]{a} = \log_c a / n$$

$$5) \log_c 10 = 1 \quad \text{sí } c = 10$$

$$6) \log_c 1 = 0$$

Ejemplo:

La expresión $\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right]$ es equivalente a:

Para esta expresión, primero se aplica la ley número 2, quedando la expresión:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = \log (x^2 z) - \log (y^3)$$

Aplicando la ley número 1, al primer término del segundo miembro de la ecuación anterior obtenemos:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = \log x^2 + \log z - \log y^3$$



Aplicando por último la ley número 3, la expresión equivalente sería:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = 2 \log x + \log z - 3 \log y$$

Una de las aplicaciones más importantes de estas reglas de los logaritmos son las ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas, por ejemplo:

Resolver: $4^{x-1} = 8^{x+1}$

Aplicando logaritmo a ambos miembros de la ecuación, y la ley número tres:

$$\begin{aligned} \log(4^{x-1}) &= \log(8^{x+1}) \\ (x-1) \log 4 &= (x+1) \log 8 \end{aligned}$$

Manipulando algebraicamente y realizando operaciones se tendrá:

$$\begin{aligned} x-1 &= (x+1) \frac{\log 8}{\log 4} \\ x-1 &= (x+1) \frac{0.9031}{0.6021} \\ x-1 &= (x+1) (1.5) \\ x-1 &= 1.5x + 1.5 \\ x - 1.5x &= 1.5 + 1 \\ -0.5x &= 2.5 \\ x &= \frac{2.5}{-0.5} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de "x" que hace cierta la ecuación es : $x = -5$.

Geometría analítica

Geometría analítica, rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes.

En la figura 1, el punto A está a 1 unidad del eje vertical (y) y a 4 unidades del horizontal (x). Las coordenadas del punto A son por tanto 1 y 4, y el punto queda fijado dando las expresiones $x = 1$, $y = 4$. Los valores positivos de x están situados a la

derecha del eje y , y los negativos a la izquierda; los valores positivos de y están por encima del eje x y los negativos por debajo. Así, el punto B de la figura 1 tiene por coordenadas $x = 5$, $y = 0$. En un espacio tridimensional, los puntos se pueden localizar de manera similar utilizando tres ejes, el tercero de los cuales, normalmente llamado z , es perpendicular a los otros dos en el punto de intersección, también llamado *origen*.

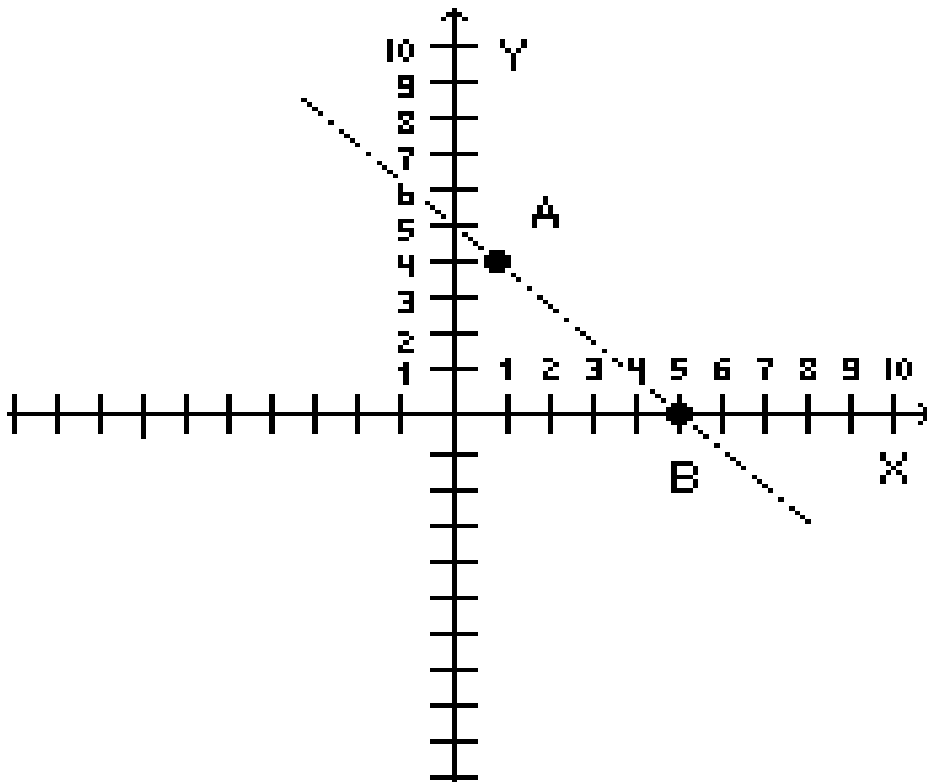


Figura 1

En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables, x e y , de la forma $ax + by + c = 0$. De la misma manera, se pueden encontrar fórmulas para la circunferencia, la elipse y otras cónicas y curvas regulares. La geometría analítica se ocupa de dos tipos clásicos de problemas. El primero es: dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. Siguiendo con el ejemplo anterior, todos los puntos que pertenecen a la línea recta que pasa por A y B cumplen la ecuación lineal $x + y = 5$;

Figuras 1 y 2: sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas es la representación matemática de la posición de puntos. En las coordenadas cartesianas (*izquierda*) un punto se localiza según su posición entre dos ejes que se cortan, uno horizontal y otro vertical, que se denominan x e y . En las coordenadas polares (*derecha*) un punto se localiza según su distancia a otro punto, denominado polo, y el ángulo formado por un eje fijo que pasa por el polo

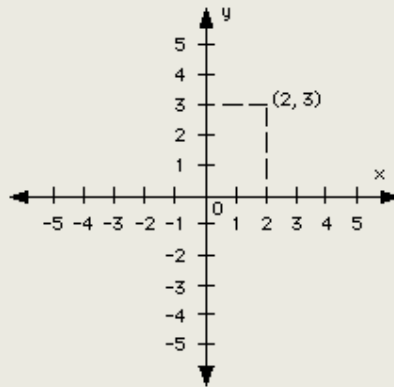


FIGURA 1
Coordenadas cartesianas bidimensionales

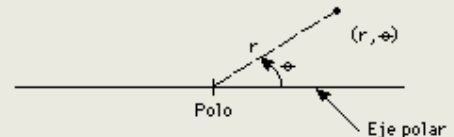


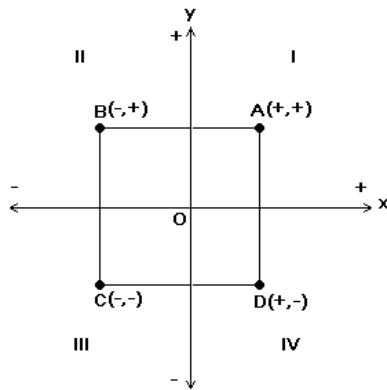
FIGURA 2
Coordenadas polares

e
el punto con el

en general, $ax + by = c$. El segundo tipo de problema es: dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión. Por ejemplo, una circunferencia de radio 3 y con su centro en el origen es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen $x^2 + y^2 = 9$. Usando ecuaciones como éstas, es posible resolver algebraicamente esos problemas geométricos de construcción, como la bisección de un ángulo o de una recta dados, encontrar la perpendicular a una recta que pasa por cierto punto, o dibujar una circunferencia que pasa por tres puntos dados que no estén en línea recta.

5 Funciones analíticas

Entendiendo entonces que la principal herramienta de la geometría analítica es el plano cartesiano, el cual se conoce mas formalmente como sistema de coordenadas rectangulares, este sistema esta formado como sabemos, de un par de rectas numéricas que se interceptan en un punto llamado origen y son perpendiculares entre sí, lo que da lugar a la formación de los llamados ejes cartesianos los cuales se conocen como eje x (o eje de las abcisas) y eje y (o eje de las ordenadas), estas condiciones forman también los llamados cuadrantes los cuales se numeran como muestra la siguiente figura, se muestra también el sentido de cada uno de los



ejes coordenados, y los signos de un punto representativo localizado en cada cuadrante.

De la figura anterior se puede observar que se puede representar un punto por medio de un par ordenado de números que representaran las unidades sobre el eje x y las unidades sobre el eje y y que se deben tomar para localizar un punto en particular, lo cual implica que podemos representar lugares geométricos a partir de números y ecuaciones, que es donde radica uno de los objetivos de la geometría analítica, el otro objetivo es teniéndose las ecuaciones y números obtener el tipo de lugar geométrico al que están representando.

LA RECTA.

La recta es el primer lugar geométrico que se trata en la geometría analítica, no hay una definición precisa de lo que es una recta y por lo tanto se tomará entonces la definición intuitiva que se manejo en el apartado de geometría plana, complementariamente a eso una recta se puede definir a partir de las propiedades que cumplen los puntos que la forman de lo cual se deduce que una recta se puede representar si se cumplen dos condiciones:

1. Si se conocen dos puntos que la forman o por los cuales pase.
2. Si se conoce un punto y su inclinación o pendiente con respecto a la horizontal.

Las siguientes relaciones nos darán la forma de representar una ecuación en diferentes circunstancias y con diferentes datos, pero siempre cumpliendo las dos condiciones anteriores

Distancia entre dos puntos.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de un segmento.

$$Pm = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right]$$

Ecuación Pendiente - Ordenada al origen
 $y = mx + b$

Paralelismo

$$m_1 = m_2$$

Perpendicularidad

$$m_1 * m_2 = -1$$

Ángulo entre Dos Rectas

$$\text{tang } \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Pendiente de una recta.

$$m = \text{tang } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación cartesiana de la recta o ecuación de la recta teniendo dos puntos.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación Punto - Pendiente de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación General de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$

$$1 + m_2 * m_1$$

Distancia de un Punto a una Recta.

$$D = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

LA CIRCUNFERENCIA

La definición de la circunferencia es exactamente la misma que para la geometría plana, las siguientes relaciones proporcionan interpretación analítica de este lugar geométrico

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen. (Fig. 1).

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad c(0, 0)$$

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen. (Fig. 2)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad c(h, k)$$

Ecuación general de la circunferencia.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como se observa una circunferencia estará definida si se conoce su centro y su radio, independientemente de la localización de su centro si se analiza detenidamente, se podrá ver que ambas ecuaciones de la circunferencia, con centro dentro y fuera del origen son las mismas.

LA PARABOLA.

La parábola forma parte de un conjunto de lugares geométricos llamado secciones cónicas, el cual está formado por la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

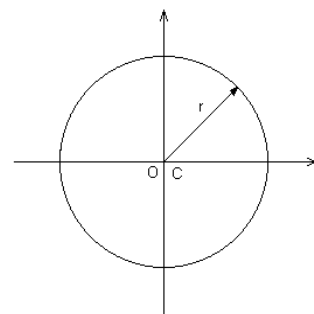


Fig. 1

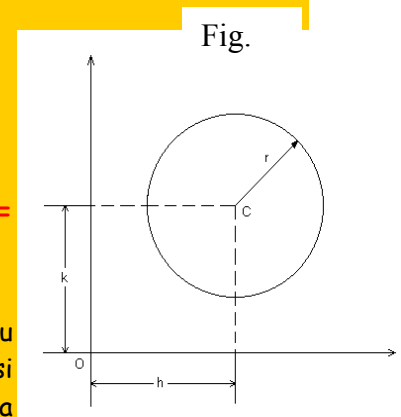


Fig. 2

La parábola se define formalmente como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos que equidista de un punto fijo llamado foco (F) y una recta fija llamada directriz (D), en la figura 3, se muestran los elementos de una parábola.

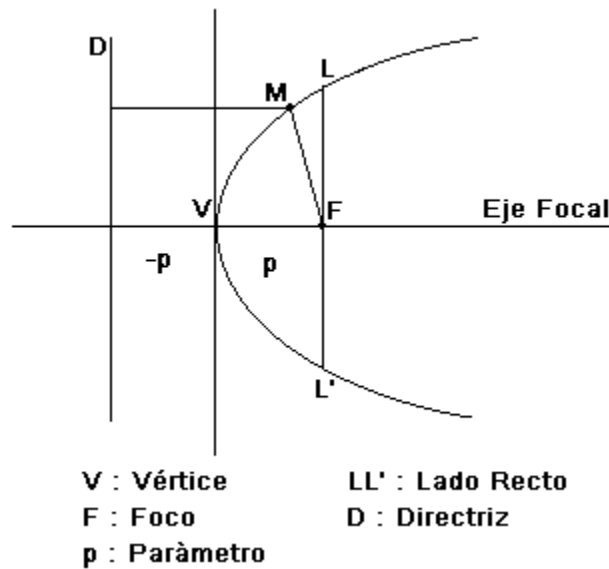


Fig. 3

Las siguientes son relaciones que proporcionan las diferentes representaciones analíticas de la parábola.

$$x^2 = \pm 4 p y$$

Parábola vertical $V(0,0)$ y $F(0, \pm p)$
(Fig. 4)

$$y^2 = \pm 4 p x$$

Parábola horizontal $V(0,0)$ y $F(\pm p, 0)$
(Fig. 5)

$$(x - h)^2 = \pm 4 p (y - k)$$

Parábola vertical $V(h, k)$ y $F(h, k + p)$
(Fig. 6)

$$(y - k)^2 = \pm 4 p (x - h)$$

Parábola horizontal $V(h, k)$ y $F(h + p, k)$
(Fig. 7)

$$A x^2 + D x + E y + F = 0$$

Ecuación general de la parábola.

$$C y^2 + E y + D x + F = 0$$

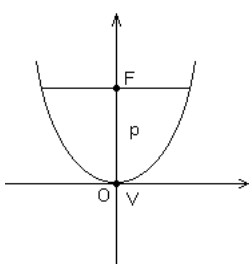


Fig. 4

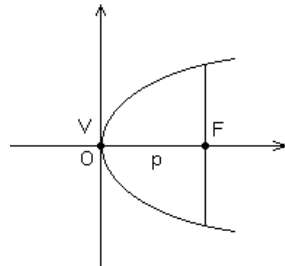


Fig. 5

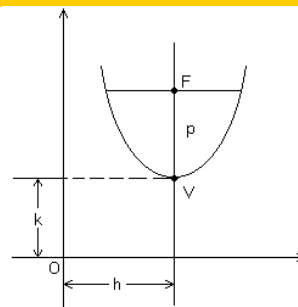


Fig. 6

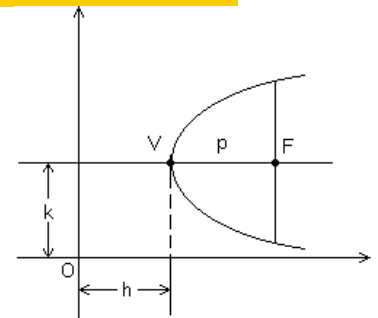


Fig. 7

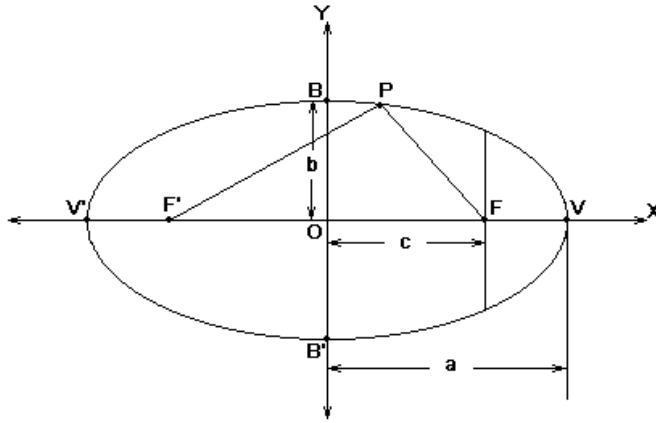
Para todas las condiciones anteriores el valor del lado recto es: $LR = |4p|$ y la ecuación de la directriz se puede obtener a partir de las coordenadas del foco y la orientación del eje focal sabiendo que la directriz será perpendicular a dicho eje.

Al igual que los dos lugares geométricos anteriores, para definir este lugar geométrico se deben conocer dos de sus parámetros, los cuales para la parábola pueden ser el vértice y el foco, el vértice y el parámetro ó el foco y el parámetro.

LA ELIPSE

La elipse es otro lugar geométrico de las llamadas cónicas, y se define formalmente como: "El lugar geométrico formado por el conjunto de puntos en un plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante".

La definición anterior así como los elementos de una elipse se presentan en la figura 8.



La suma de los segmentos PF y PF' es a los que hace referencia la definición, algebraicamente se tiene:

$$PF + PF' = 2a$$

De la figura:

O es el centro de la elipse

V y V' son los vértices del eje mayor.

B y B' son los vértices del eje menor.

F y F' son los focos

Existe un parámetro que se

debe tomar en cuenta para las elipses e hipérbolas, aunque también implica a la circunferencia y a la parábola, dicho parámetro es la excentricidad, que indica el grado de redondez que posee la sección cónica de la que se está hablando.

Las siguientes son las ecuaciones de una elipse en sus diferentes orientaciones.

Elipse Horizontal con centro en el origen. (Fig. 9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b \quad C(0,0)$$

$$e = \frac{c}{a} \quad F(c,0) \quad F'(-c,0)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad V(a,0) \quad V'(-a,0)$$

$$LR = \left| \frac{2b^2}{a} \right| \quad B(0,b) \quad B'(0,-b)$$

Elipse Vertical con centro en el origen. (Fig. 10)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad C(0,0)$$

$$F(0,c) \quad F'(0,-c)$$

$$V(0,a) \quad V'(0,-a)$$

$$B(b,0) \quad B'(-b,0)$$

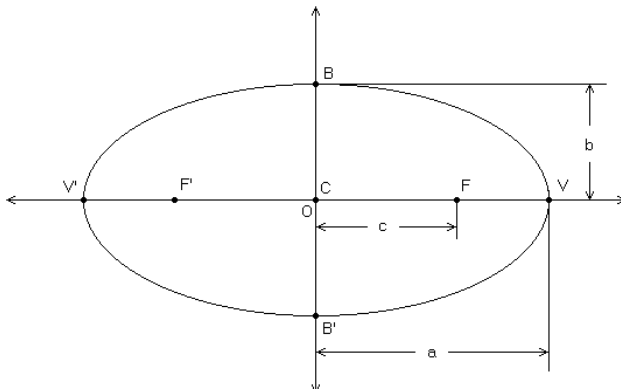


Fig. 9

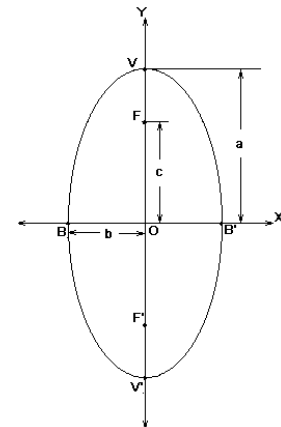


Fig. 10

Elipse Horizontal con centro fuera del origen. (Fig. 11)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$a > b$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$LR = \left| \frac{2b^2}{a} \right|$$

$$C(h, k)$$

$$F(h+c, k) \quad F'(h-c, k)$$

$$V(h+a, k) \quad V'(h-a, k)$$

$$B(h, k+b) \quad B'(h, k-b)$$

Elipse Vertical con centro fuera del origen. (Fig. 12)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$C(h, k)$$

$$F(h, k+c) \quad F'(h, k-c)$$

$$V(h, k+a) \quad V'(h, k-a)$$

$$B(h+b, k) \quad B'(h-b, k)$$

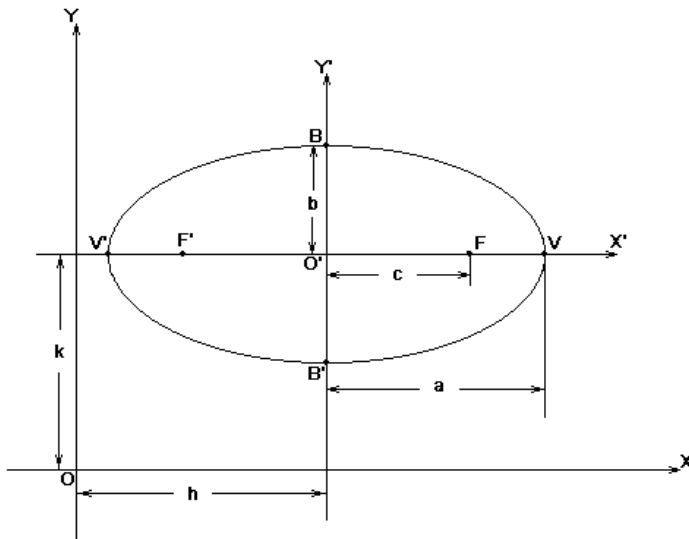


Fig.

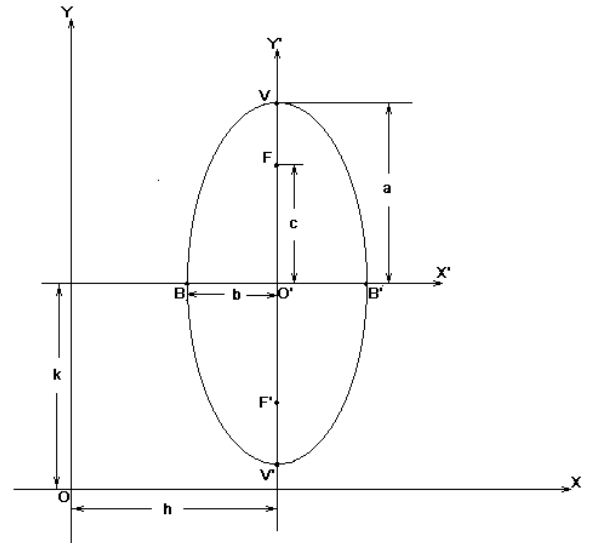


Fig.

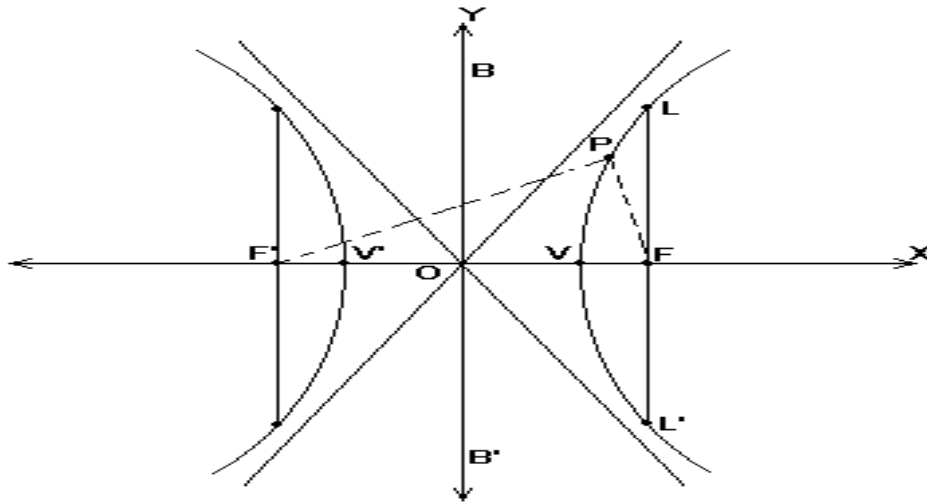
Para la elipse también de debe conocer ciertos elementos para poder representarla analíticamente, los parámetros pueden ser el centro y los vértices (del eje mayor y del eje menor); el centro, un foco y uno de los vértices ó el centro, un foco y la excentricidad, etc.

Una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

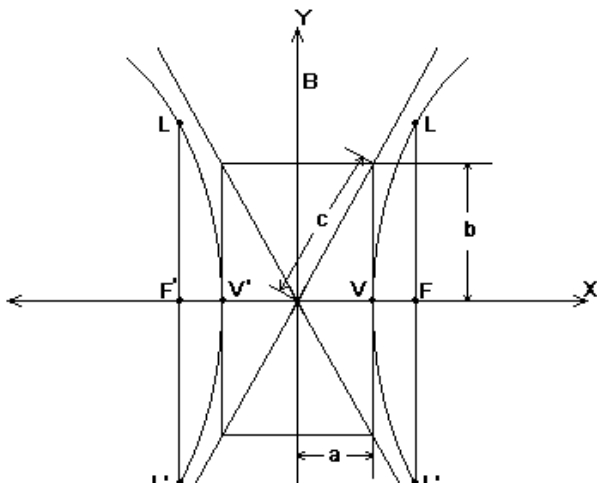
representará una elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos si los coeficientes A y C son diferentes pero con el mismo signo. Esta ecuación se conoce como *ecuación general de la elipse*.

La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Matemáticamente se define como: $PF' - PF = 2a$; la curva tiene como características ser abierta y ser formada por dos ramas, al igual que la parábola y la elipse, la hipérbola es simétrica. En la siguiente figura se muestran los elementos de la hipérbola.



- PF y PF': Radios focales
- FF': Distancia focal y se toma $FF'=2c$
- O: Origen del sistema
- LL': Lado recto
- VV': Eje focal, real o transverso, cuya longitud es $VV'=2a$
- BB': Eje conjugado o imaginario, no corta la curva y $BB'=2b$

Las siguientes son las relaciones que proporcionan las ecuaciones de la hipérbola en sus diferentes orientaciones:



Hipérbola horizontal con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$F(c, 0) \quad F'(-c, 0)$$

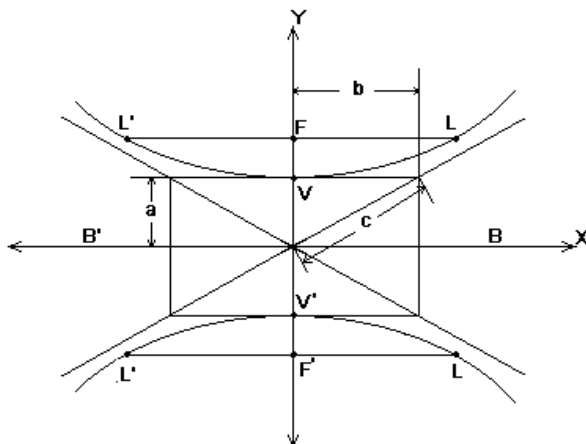
$$V(a, 0) \quad V'(-a, 0)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad LL' = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

ec. Asíntotas:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$



Hipérbola vertical con centro en el origen.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$F(0, c) \quad F'(0, -c)$$

$$V(0, a) \quad V'(0, -a)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad LL' = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad \text{ec. Asíntotas: } y = \pm \frac{a}{b}x$$

La hipérbola al igual que los lugares geométricos anteriores puede ser trasladada a un centro fuera del origen, con coordenadas $C(h, k)$ y al igual que estos la variación en sus ecuaciones se obtiene tomando en cuenta el corrimiento horizontal y vertical que sufre el lugar geométrico, el cambio de cada uno de sus elementos se puede deducir fácilmente, las ecuaciones ordinarias quedaran en la forma:

Para la hipérbola horizontal

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Para la hipérbola vertical

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

La *ecuación general* que representa una hipérbola con ejes paralelos a los ejes cartesianos es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde los coeficientes A y C deben ser de diferente signo.

Como podemos notar, los lugares geométricos cuyas ecuaciones están expresados por ecuaciones de 2^{do} grado, tienen una forma o ecuación general muy similar la cual si se generaliza esta dada por la expresión:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual es precisamente la ecuación general de las cónicas, la ecuación particularizada para cada una de ellas ya se mostró, pero existe otro criterio para saber a partir de una ecuación general de que tipo de lugar geométrico se trata, dicho criterio implica la evaluación del discriminante o indicador: $B^2 - 4AC$; el criterio es el siguiente:

Sí $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una elipse.

Sí $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una parábola.

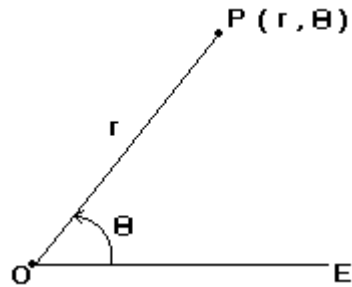
Sí $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una hipérbola.

Con este criterio es posible identificar más fácilmente el lugar geométrico que se está analizando y poder aplicar las relaciones correspondientes.

COORDENADAS POLARES

Este es otro sistema de coordenadas por medio del cual se puede fijar la posición de un punto o lugar geométrico sobre un plano, dicho sistema está formado por un eje fijo llamado eje polar, el cual inicia en el origen o polo del sistema.

La ubicación de un punto estará dada a través de la distancia existente entre el polo y el punto que se este manejando (llamado radio vector), y por medio del ángulo formado por el radio vector y el eje polar, gráficamente:



El sentido del ángulo θ es el convencional, es decir, positivo en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (anti-horario), el radio vector también puede ser positivo o negativo, el sentido lo dará también el sentido convencional, hacia la derecha positivo y hacia la izquierda negativo.

La relación existente entre las coordenadas polares y las rectangulares se da por medio de las siguientes relaciones:

$$x = r \cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta \quad \gamma \quad r^2 = x^2 + y^2$$

las expresiones anteriores se pueden deducir fácilmente si se hace coincidir el origen del plano cartesiano con el origen o polo del sistema polar y obteniendo la abscisa y ordenada del punto P.

Cálculo

1 INTRODUCCIÓN

Cálculo, rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los incrementos en las variables, pendientes de curvas, valores máximo y mínimo de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes. Su uso es muy extenso, sobre todo en ciencias e ingeniería, siempre que haya cantidades que varíen de forma continua.

DERIVADAS E INTEGRALES INDEFINIDAS

En la siguiente tabla, las letras u y v representan cualquier función de x ; a y m son constantes. Debe sumarse una constante de integración arbitraria a cada una de las integrales.

DERIVADAS	INTEGRALES INDEFINIDAS	DERIVADAS	INTEGRALES INDEFINIDAS
1. $\frac{d}{dx} x = 1$	1. $\int dx = x$	9. $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$	9. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
2. $\frac{d}{dx} (au) = a \frac{du}{dx}$	2. $\int au \, dx = a \int u \, dx$	10. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$	10. $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln \sec x $
3. $\frac{d}{dx} (u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	3. $\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$	11. $\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$	11. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln \operatorname{sen} x $
4. $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$	4. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$	12. $\frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$	12. $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \operatorname{tg} x $
5. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x $	13. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$	13. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x $
6. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	6. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$	14. $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
7. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$	7. $\int e^x \, dx = e^x$	15. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$
8. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$	8. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$	16. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x$

Derivadas e integrales indefinidas de algunas funciones

3 CÁLCULO DIFERENCIAL

El cálculo diferencial estudia los incrementos en las variables. Sean x e y dos variables relacionadas por la ecuación $y = f(x)$, en donde la función f expresa la dependencia del valor de y con los valores de x . Por ejemplo, x puede ser tiempo e y la distancia recorrida por un objeto en movimiento en el tiempo x . Un pequeño incremento h en la x , de un valor x_0 a $x_0 + h$, produce un incremento k en la y que pasa de $y_0 = f(x_0)$ a $y_0 + k = f(x_0 + h)$, por lo que $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. El cociente k/h representa el incremento medio de la y cuando la x varía de x_0 a $x_0 + h$. La gráfica de la función $y = f(x)$ es una curva en el plano xy y k/h es la pendiente de la recta AB entre los puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_0 + h, y_0 + k)$ en esta curva; esto se muestra en la figura 1, en donde $h = AC$ y $k = CB$, así es que k/h es la tangente del ángulo BAC .

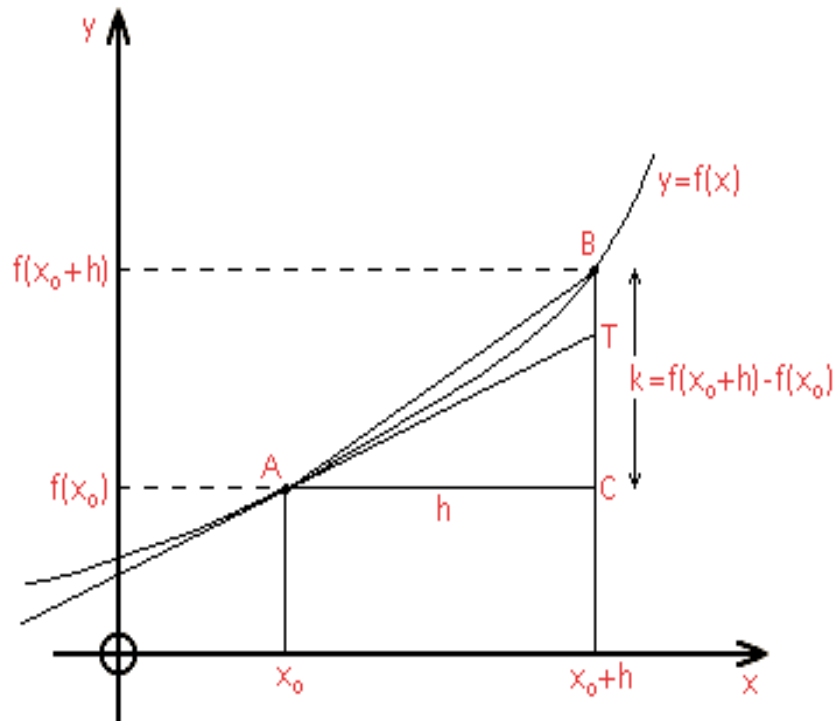
Si h tiende hacia 0, para un x_0 fijo, entonces k/h se aproxima al cambio instantáneo de la y en x_0 ; geoméricamente, B se acerca a A a lo largo de la curva $y = f(x)$, y la recta AB tiende hacia la tangente a la curva, AT , en el punto A . Por esto, k/h tiende hacia la pendiente de la tangente (y por tanto de la curva) en A . Así, se define la derivada $f'(x_0)$ de la función $y = f(x)$ en x_0 como el límite que toma k/h cuando h tiende hacia cero, lo que se escribe:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Este valor representa la magnitud de la variación de y y la pendiente de la curva en A . Cuando, por ejemplo, x es el tiempo e y es la distancia, la derivada representa la velocidad instantánea. Valores positivos, negativos y nulos de $f'(x_0)$ indican que $f(x)$ crece, decrece o es estacionaria respectivamente en x_0 . La derivada de una función es a su vez otra función $f'(x)$ de x , que a veces se escribe como dy/dx , df/dx o Df . Por ejemplo, si $y = f(x) = x^2$ (parábola), entonces

$$\begin{aligned} k &= f(x_0 + h) - f(x_0) \\ &= (x_0 + h)^2 - x_0^2 \\ &= (x_0^2 + 2x_0h + h^2) - x_0^2 \\ &= 2x_0h + h^2 \end{aligned}$$

por lo que $k/h = 2x_0 + h$, que tiende hacia $2x_0$ cuando h tiende hacia 0. La pendiente de la curva cuando $x = x_0$ es por tanto $2x_0$, y la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. De manera similar, la derivada de x^m es mx^{m-1} para una m constante. Las derivadas de las funciones más corrientes son bien conocidas (véase la tabla adjunta con algunos ejemplos).



© Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

Figura 1: pendiente de una curva

La pendiente o gradiente de una curva cualquiera en un punto se define como la pendiente de la tangente (recta que toca a la curva sólo en dicho punto). En la figura, la pendiente de la curva en A es la pendiente de la recta AT , que es la tangente a la curva en A . Esta pendiente se puede aproximar por la de la recta AB , que une A y B , un punto cercano de la curva. La pendiente de AB es k/h . Si B se acerca hacia A , tanto k como h tienden a 0, pero su cociente tiende a un determinado valor, que es la pendiente de AT . El cálculo diferencial se ocupa de calcular la pendiente de las curvas $y = f(x)$ en todos sus puntos.

Para calcular la derivada de una función, hay que tener en cuenta unos cuantos detalles: primero, se debe tomar una h muy pequeña (positiva o negativa), pero siempre distinta de cero. Segundo, no toda función f tiene una derivada en todas las x_0 , pues k/h puede no tener un límite cuando $h \rightarrow 0$; por ejemplo, $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x_0 = 0$, pues k/h es 1 o -1 según que $h > 0$ o $h < 0$; geoméricamente, la curva tiene un vértice (y por tanto no tiene tangente) en $A = (0,0)$. Tercero, aunque la notación dy/dx sugiere el cociente de dos números dy y



dx (que indican cambios infinitesimales en y y x) es en realidad un solo número, el límite de k/h cuando ambas cantidades tienden hacia cero.

Diferenciación es el proceso de calcular derivadas. Si una función f se forma al combinar dos funciones u y v , su derivada f' se puede obtener a partir de u , v y sus respectivas derivadas utilizando reglas sencillas. Por ejemplo, la derivada de la suma es la suma de las derivadas, es decir, si $f = u + v$ (lo que significa que $f(x) = u(x) + v(x)$ para todas las x) entonces $f' = u' + v'$. Una regla similar se aplica para la diferencia: $(u - v)' = u' - v'$. Si una función se multiplica por una constante, su derivada queda multiplicada por dicha constante, es decir, $(cu)' = cu'$ para cualquier constante c . Las reglas para productos y cocientes son más complicadas: si $f = uv$ entonces $f' = uv' + u'v$, y si $f = u/v$ entonces $f' = (u'v - uv')/v^2$ siempre que $v(x) \neq 0$. Utilizando estas reglas se pueden derivar funciones complicadas; por ejemplo, las derivadas de x^2 y x^5 son $2x$ y $5x^4$, por lo que la derivada de la función $3x^2 - 4x^5$ es $(3x^2 - 4x^5)' = (3x^2)' - (4x^5)' = 3 \cdot (x^2)' - 4 \cdot (x^5)' = 3 \cdot (2x) - 4 \cdot (5x^4) = 6x - 20x^4$. En general, la derivada de un polinomio cualquiera $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ es $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$; como caso particular, la derivada de una función constante es 0. Si $y = u(z)$ y $z = v(x)$, de manera que y es una función de z y z es una función de x , entonces $y = u(v(x))$, con lo que y es función de x , que se escribe $y = f(x)$ donde f es la composición de u y v ; la regla de la cadena establece que $dy/dx = (dy/dz) \cdot (dz/dx)$, o lo que es lo mismo, $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$. Por ejemplo, si $y = e^z$ en donde $e = 2,718\dots$ es la constante de la exponenciación, y $z = ax$ donde a es una constante cualquiera, entonces $y = e^{ax}$; según la tabla, $dy/dz = e^z$ y $dz/dx = a$, por lo que $dy/dx = ae^{ax}$.

Muchos problemas se pueden formular y resolver utilizando las derivadas. Por ejemplo, sea y la cantidad de material radiactivo en una muestra dada en el instante x . Según la teoría y la experiencia, la cantidad de sustancia radiactiva en la muestra se reduce a una velocidad proporcional a la cantidad restante, es decir, $dy/dx = ay$ con una cierta constante negativa a . Para hallar y en función de x , hay que encontrar una función $y = f(x)$ tal que $dy/dx = ay$ para cualquier x . La forma general de esta función es $y = ce^{ax}$ en donde c es una constante. Como $e^0 = 1$, entonces $y = c$ para $x = 0$, así es que c es la cantidad inicial (tiempo $x = 0$) de material en la muestra. Como $a < 0$, se tiene que $e^{ax} \square 0$ cuando x crece, por lo que $y \square 0$, confirmando que la muestra se reducirá gradualmente hasta la nada. Este es un ejemplo de caída exponencial que se muestra en la figura 2a. Si a es una constante positiva, se obtiene la misma solución, $y = ce^{ax}$, pero en este caso cuando el tiempo transcurre, la y crece rápidamente (como hace e^{ax} si $a > 0$). Esto es un crecimiento exponencial que se muestra en la figura 2b y que se pone de manifiesto en explosiones nucleares. También ocurre en comunidades animales donde la tasa de crecimiento es proporcional a la población.

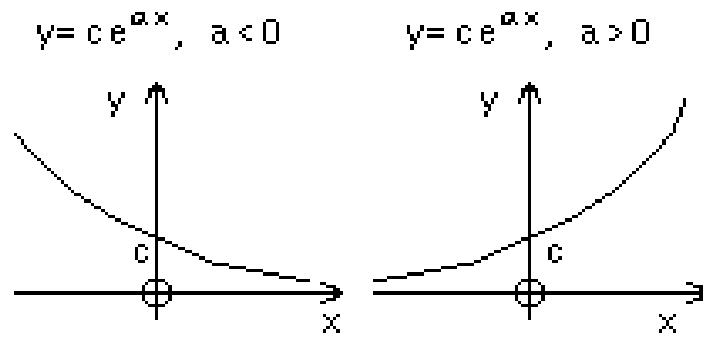
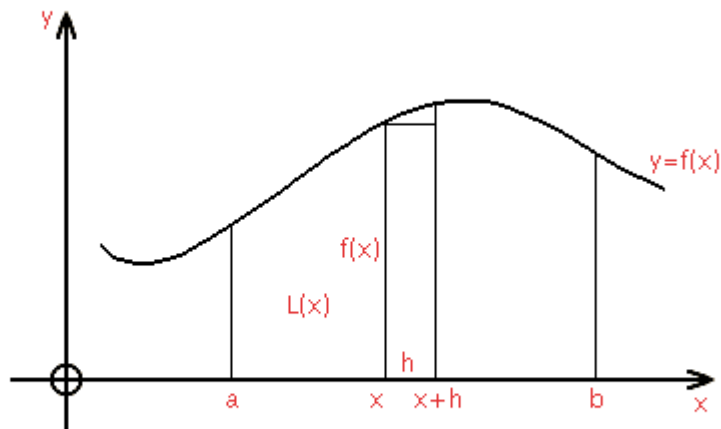


Figura 2a

Figura 2b

4 CÁLCULO INTEGRAL



©

Figura 3: cálculo integral

El cálculo del área bajo una curva es un ejemplo clásico del uso del cálculo integral. En esta figura, el área entre la curva y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es aproximadamente igual a la suma de un gran número de rectángulos como el dibujado. El área de uno de éstos es $f(x)$ veces h . Cuando h se reduce, los rectángulos son más estrechos y su número crece, con lo que el área total se aproxima cada vez más al área buscada. El cálculo integral es capaz de hallar este valor si se conoce la función, $y = f(x)$, que describe la curva.

El cálculo integral se basa en el proceso inverso de la derivación, llamado integración. Dada una función f , se busca otra función F tal que su derivada es $F' = f$; F es la integral, primitiva o antiderivada de f , lo que se escribe $F(x) = \int f(x) dx$ o simplemente $F = \int f dx$ (esta notación se explica más adelante). Las tablas de derivadas se pueden utilizar para la integración: como la derivada de x^2 es $2x$, la integral de $2x$ es x^2 . Si F es la integral de f , la forma más general de la integral de f es $F + c$, en donde c es una constante cualquiera llamada constante de



integración; esto es debido a que la derivada de una constante es 0 por lo que $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$. Por ejemplo, $\int 2x dx = x^2 + c$.

Las reglas básicas de integración de funciones compuestas son similares a las de la diferenciación. La integral de la suma (o diferencia) es igual a la suma (o diferencia) de sus integrales, y lo mismo ocurre con la multiplicación por una constante. Así, la integral de $x = \frac{1}{2} \cdot 2x$ es $\frac{1}{2}x^2$, y de forma similar $\int x^m dx = x^{m+1}/(m+1)$ para cualquier $m \neq -1$ (no se incluye el caso de $m = -1$ para evitar la división por 0; el logaritmo neperiano $\ln|x|$ es la integral de $x^{-1} = 1/x$ para cualquier $x \neq 0$). La integración suele ser más difícil que la diferenciación, pero muchas de las funciones más corrientes se pueden integrar utilizando éstas y otras reglas (ver la tabla).

Una aplicación bien conocida de la integración es el cálculo de áreas. Sea A el área de la región delimitada por la curva de una función $y = f(x)$ y por el eje x , para $a \leq x \leq b$. Para simplificar, se asume que $f(x) \geq 0$ entre a y b . Para cada $x \geq a$, sea $L(x)$ el área de la región a la izquierda de la x , así es que hay que hallar $A = L(b)$. Primero se deriva $L(x)$. Si h es una pequeña variación en la x , la región por debajo de la curva entre x y $x + h$ es aproximadamente un rectángulo de altura $f(x)$ y anchura h (véase figura 3); el correspondiente incremento $k = L(x + h) - L(x)$ es por tanto, aproximadamente, $f(x)h$, por lo que k/h es, aproximadamente, $f(x)$. Cuando $h \rightarrow 0$ estas aproximaciones tienden hacia los valores exactos, así es que $k/h \rightarrow f(x)$ y por tanto $L'(x) = f(x)$, es decir, L es la integral de f . Si se conoce una integral F de f entonces $L = F + c$ para cierta constante c . Se sabe que $L(a) = 0$ (pues el área a la izquierda de la x es cero si $x = a$), con lo que $c = -F(a)$ y por tanto $L(x) = F(x) - F(a)$ para todas las $x \geq a$. El área buscada, $A = L(b) = F(b) - F(a)$, se escribe

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

Éste es el teorema fundamental del cálculo, que se cumple siempre que f sea continua entre a y b , y se tenga en cuenta que el área de las regiones por debajo del eje x es negativa, pues $f(x) < 0$. (Continuidad significa que $f(x) \rightarrow f(x_0)$ si $x \rightarrow x_0$, de manera que f es una curva sin ninguna interrupción).

El área es una integral definida de f que es un número, mientras que la integral indefinida $\int f(x) dx$ es una función $F(x)$ (en realidad, una familia de funciones $F(x) + c$). El símbolo \int (una S del siglo XVII) representa la suma de las áreas $f(x) dx$ de un número infinito de rectángulos de altura $f(x)$ y anchura infinitesimal dx ; o mejor dicho, el límite de la suma de un número finito de rectángulos cuando sus anchuras tienden hacia 0.



La derivada $dy/dx = f'(x)$ de una función $y = f(x)$ puede ser diferenciada a su vez para obtener la segunda derivada, que se denota d^2y/dx^2 , $f''(x)$ o D^2f . Si por ejemplo x es el tiempo e y es la distancia recorrida, entonces dy/dx es la velocidad v , y $d^2y/dx^2 = dv/dx$ es el incremento en la velocidad, es decir, la aceleración. Según la segunda ley del movimiento del Newton, un cuerpo de masa constante m bajo la acción de una fuerza F adquiere una aceleración a tal que $F = ma$. Por ejemplo, si el cuerpo está bajo la influencia de un campo gravitatorio $F = mg$ (donde g es la magnitud del campo), y entonces $ma = F = mg$ por lo que $a = g$, y por tanto $dv/dx = g$. Al integrar, se tiene que $v = gx + c$, en donde c es una constante; sustituyendo $x = 0$ se ve que c es la velocidad inicial. Integrando $dy/dx = v = gx + c$, se tiene que $y = \frac{1}{2}gx^2 + cx + b$ en donde b es otra constante; sustituyendo de nuevo $x = 0$ se tiene que b es el valor inicial de la y .

Las derivadas de orden superior $f^{(n)}(x) = d^n y/dx^n = D^n f$ de $f(x)$ se calculan diferenciando n veces sucesivamente. El teorema de Taylor muestra que $f(x)$ se puede aproximar como una serie de potencias $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, donde los coeficientes a_0, a_1, \dots son constantes tales que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ (en donde $0! = 1$ y $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ para cualquier $n \geq 1$). Las funciones utilizadas más a menudo pueden aproximarse por series de Taylor; por ejemplo si $f(x) = e^x$ se tiene que $f^{(n)}(x) = e^x$ para cualquier n , y que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ por lo que:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

5 DERIVADAS PARCIALES

Las funciones con varias variables tienen también derivadas. Sea $z = f(x, y)$, es decir, z es función de x e y . Si se mantiene y constante temporalmente, z es una función de x , con lo que al diferenciar se obtiene la derivada parcial $\delta z/\delta x = \delta f/\delta x$; de la misma manera, si se toma la x como constante y se diferencia con respecto de la y se obtiene $\delta z/\delta y = \delta f/\delta y$. Por ejemplo, si $z = x^2 - xy + 3y^2$ se tiene que $\delta z/\delta x = 2x - y$ y que $\delta z/\delta y = -x + 6y$. Geométricamente, una ecuación $z = f(x, y)$ define una superficie en un espacio tridimensional; si los ejes x e y son horizontales y el eje z es vertical, entonces $\delta z/\delta x$ y $\delta z/\delta y$ representan los gradientes de dicha superficie en el punto (x, y, z) en la dirección de los ejes x e y , respectivamente. Las derivadas parciales también se pueden calcular para funciones con más de dos variables, considerando que todas las variables menos una son constantes y derivando con respecto a ésta. Utilizando este procedimiento es posible calcular derivadas parciales de orden superior. Las derivadas parciales



son importantes en las matemáticas aplicadas, pues existen funciones que dependen de diversas variables, como el espacio y el tiempo.